- Интерференција два таласа

Нека су дата два линеарно поларизована таласа:

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}\cos(\vec{k}_1\vec{r} - \omega t + \varepsilon_1)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}\cos(\vec{k}_2\vec{r} - \omega t + \varepsilon_2)$$

која се преклапају у тачки P, где су $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \omega, \varepsilon_1$ и ε_2 const.

Одредити интензитет светлости у тачки P!!!

Резултантно поље је:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Интензитет светлости:

$$I \approx \langle \vec{E}^2 \rangle$$

$$E^2 = \vec{E}\cdot\vec{E}$$

$$E^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)\cdot(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2$$

$$I_1 \sim \langle \vec{E}_1^2 \rangle$$

$$I_2 \sim \langle \vec{E}_2^2 \rangle$$

$I_{12} \sim 2\langle \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 \rangle$ - интерференциони члан

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

$$I_{12} = 2\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle = \vec{E}_{01}\, \vec{E}_{02} \cos\delta$$

δ - фазна разлика

$$\delta = (\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) - (\vec{k}_2 \cdot \vec{r}) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = const$ - кохерентни таласи

6.1. (Hecht) Нека су дата електрична поља два таласа који су паралелни:

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}\cos(\vec{k}_1\vec{r} - \omega t + \varepsilon_1)$$
$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}\cos(\vec{k}_2\vec{r} - \omega t + \varepsilon_2)$$

Извести израз за укупан интензитет светлости I у зависности од интензитета светлости појединачних таласа и фазне разлике.

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

$$I_1 \sim \langle E_1^2 \rangle$$

$$I_2 \sim \langle E_2^2 \rangle$$

$$I_{12} \sim 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$$

$$I_1 \sim \langle E_1^2 \rangle = E_{01}^2 \langle \cos^2(\vec{k}_1\vec{r} - \omega t + \varepsilon_1) \rangle$$

$$\langle \cos^2(\vec{k}_1\vec{r} - \omega t + \varepsilon_1) \rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \cos^2(\vec{k}_1\vec{r} - \omega t + \varepsilon_1)\,dt =$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{1}{2}\left(1+\cos 2(\vec{k}_1\vec{r} - \omega t + \varepsilon_1)\right)dt$$

$$= \frac{1}{2T}(t+T-t) + \frac{1}{2T}\int_t^{t+T} \cos(2\vec{k}_1\vec{r} - 2\omega t + 2\varepsilon_1)\, d(2\vec{k}_1\vec{r} - 2\omega t + 2\varepsilon_1)\cdot\left(-\frac{1}{2\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega T}\left[\sin(2\vec{k}_1\vec{r} - 2\omega(T+t) + 2\varepsilon_1) - \sin(2\vec{k}_1\vec{r} - 2\omega t + 2\varepsilon_1)\right]$$

$$T >> \tau \qquad \omega T >> 1$$

$$\langle \cos^2(\vec{k}_1\vec{r}_1 - \omega t + \varepsilon_1)\rangle = \frac{1}{2}$$

$$I_1 \sim \langle E_1^2\rangle = \frac{E_{01}^2}{2}$$

$$I_2 \sim \langle E_2^2\rangle = \frac{E_{02}^2}{2}$$

$$\vec{E}_{01} \parallel \vec{E}_{02} \Rightarrow \vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02} = E_{01}E_{02}$$

$$E_{01} = \sqrt{2I_1}$$

$$E_{02} = \sqrt{2I_2}$$

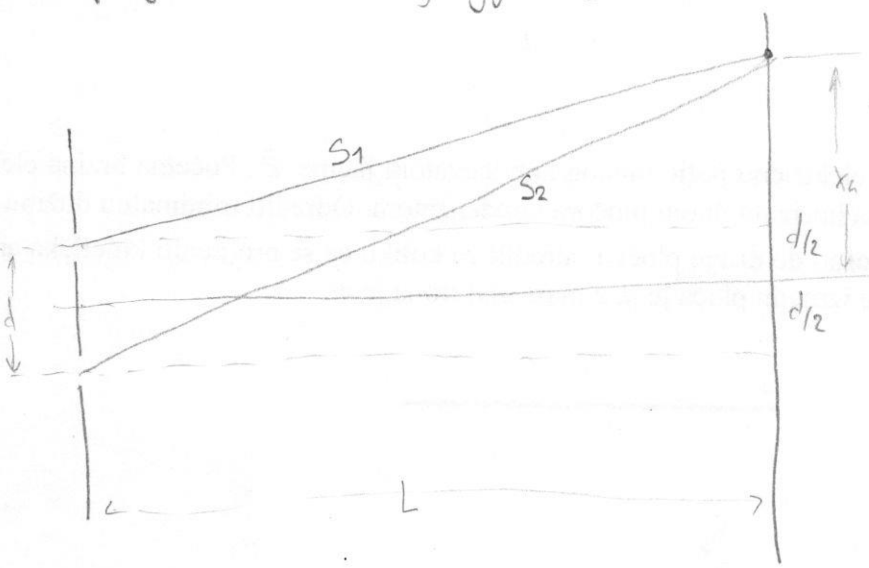
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

$$I = I_{max} \quad \cos\delta = 1, \quad \delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi,$$

$$I = I_{min} \quad \cos\delta = -1, \quad \delta = \pm\pi, \pm 3\pi,$$

Задатак

У Јанговом експерименту са две пукотине удаљене $d = 0,15\ mm$ пруге интерференције формирају се на заклону који је $75\ cm$ удаљен од пукотине. Четврта светла пруга формира се на удаљености $X_4 = 1,1\ cm$ од централне пруге. Израчунати таласну дужину светлости



$$S_2^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2$$

$$S_1^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + L^2$$

$$S_2^2 - S_1^2 = \cancel{x^2} + xd + \cancel{\frac{d^2}{4}} + \cancel{L^2} - \cancel{x^2} + xd - \cancel{\frac{d^2}{4}} - \cancel{L^2}$$

$$S_2^2 - S_1^2 = 2xd$$

$$(S_2 - S_1)(S_2 + S_1) = 2xd$$

$$S_2 + S_1 \approx 2L$$

$$S_2 - S_1 = \frac{2xd}{2L}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{xd}{L}$$

$$\Delta = n(s_2 - s_1) = n\frac{xd}{L}$$

$m = 4$

$$m\lambda = n\frac{xd}{L}$$

$$\lambda = \frac{nxd}{mL}$$

$$\lambda = \frac{1 \cdot 11mm \cdot 0{,}15mm}{4 \cdot 750\ mm}$$

$$\lambda = 0{,}00055\ mm$$

$$\lambda = 0{,}55\ \mu m$$

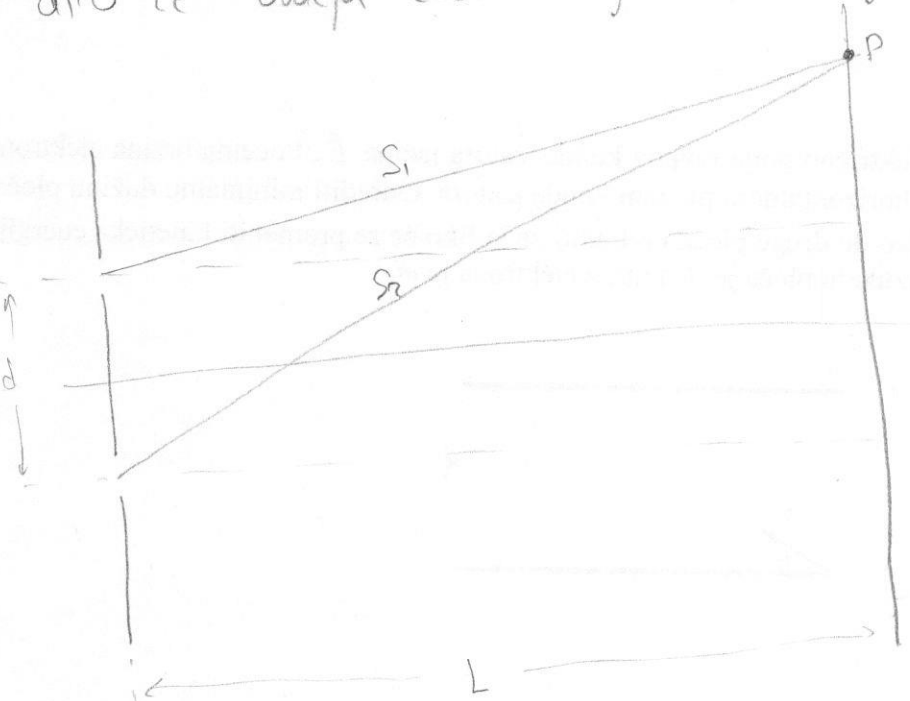
$$\lambda = 550\ nm$$

Задатак

У Јанговом експерименту отвори су обасјани хармонијском светлошћу $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}\,m$. Растојање између отвора је 1mm, а растојање између отвора и екрана је 3m. Наћи:

а) положај прве три светле пруге

б) колико ће се пута променити растојање између максимума ако се обасја светлошћу таласне дужине $\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-5}\,m$



$$S_2^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2$$

$$S_1^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + L^2$$

$$S_2^2 - S_1^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \cancel{L^2} - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 - \cancel{L^2}$$

$$S_2^2 - S_1^2 = \cancel{x^2} + xd + \cancel{\frac{d^2}{4}} - \cancel{x^2} + xd - \cancel{\frac{d^2}{4}}$$

$$S_2^2 - S_1^2 = 2xd$$

$$(S_2 - S_1)\underbrace{(S_2 + S_1)}_{\approx 2L} = 2xd$$

$$S_2 - S_1 = \frac{2xd}{2L}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{xd}{L}$$

$$\Delta = n\,(S_2 - S_1)$$

$$\Delta = n\,\frac{xd}{L}$$

$$\Delta = \pm m\lambda$$

$$n\frac{xd}{L} = m\lambda$$

$$x = \frac{mL\lambda}{nd}$$

$n =$ ваздух $= 1$

$$x_1 = \frac{1L\lambda}{d} = \frac{1 \cdot 3m \cdot 6 \cdot 10^{-5} m}{10^{-3} m} = 18 \cdot 10^{-2} m = 0{,}18\ m = 18\ cm$$

$$x_2 = \frac{2L\lambda}{d} = \frac{2 \cdot 3m \cdot 6 \cdot 10^{-5} m}{10^{-3} m} = 36 \cdot 10^{-2} m = 0{,}36\ m = 36\ cm$$

$$x_3 = \frac{3L\lambda}{d} = \frac{3 \cdot 3m \cdot 6 \cdot 10^{-5} m}{10^{-3} m} = 54 \cdot 10^{-2} m = 0{,}54\ m = 54\ cm$$

б) $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots$

$\Delta x = 18 cm$

$\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-5} m$

$$x_1' = \frac{L\lambda_1}{d} = \frac{3m \cdot 5 \cdot 10^{-5} m}{10^{-3} m} = 15 \cdot 10^{-2} m = 0{,}15\ m = 15\ cm$$

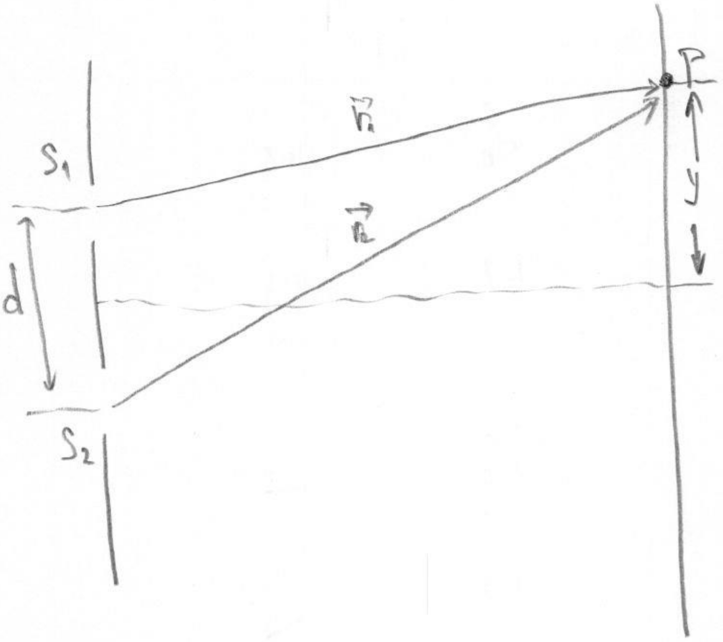
$$x_2' = \frac{2L\lambda_1}{d} = \frac{2 \cdot 3m \cdot 5 \cdot 10^{-5} m}{10^{-3} m} = 30 \cdot 10^{-2} m = 0{,}30\ m = 30\ cm$$

$$\Delta x' = x_2 - x_1 = 15\ cm$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \frac{18\ cm}{15\ cm} = 1{,}2$$

Задатак:

Одредити расподелу интензитета светлости на екрану у Јанговом експерименту, услед интерференције светлости.



Решење:

У тачки P

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$I \sim \langle E^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + \langle 2 \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle$$

$$I \sim \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle$$

За некохерентну светлост $\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle = 0$

$$I = I_1 + I_2$$

За кохерентну светлост:

(нека је $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$), max

max: $I = 4I_1$ $\qquad I_1 + I_1 + 2\sqrt{I_1 I_1}$

min: $I = 0$ $\qquad I_1 + I_1 - 2\sqrt{I_1 I_1}$

Нека кроз отвор пролази

$$E_1 = E_0 \sin \omega t$$

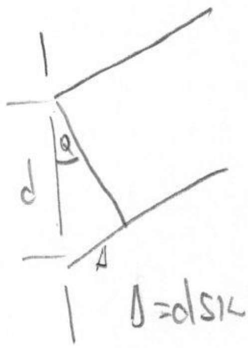
$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

За конструктивну интерференцију: $\delta = \lambda$, $\phi = 2\pi$

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\Delta}{2\pi}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$$

$$\delta = k\Delta$$



$\Delta = d \sin Q \qquad L \gg d$

$$\varphi = \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin Q$$

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \left[\sin \omega t + \sin(\omega t + \varphi)\right]$$

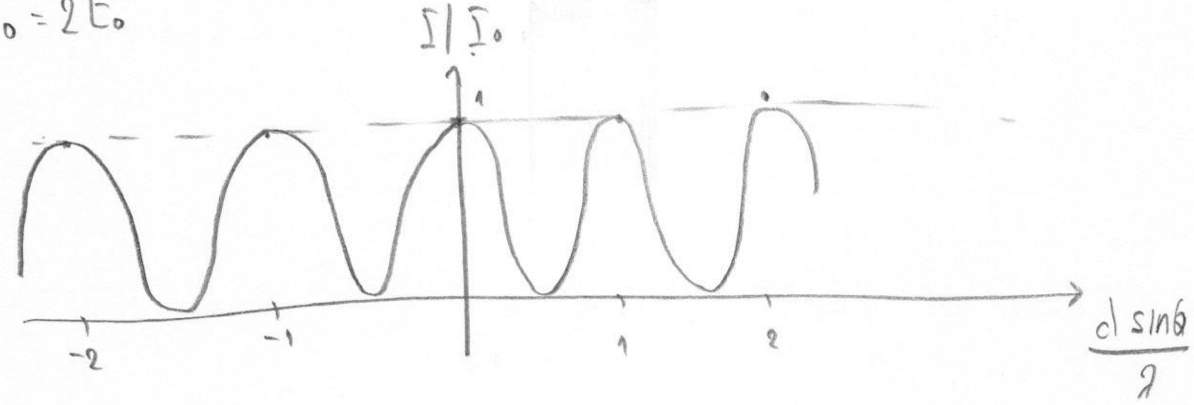
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$E = 2E_0 \cos\frac{\varphi}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$I \sim E^2 = 4E_0^2 \cos^2\frac{\varphi}{2} \underbrace{\left\langle \sin^2\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\right\rangle}_{\frac{1}{2}} = 2E_0^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)$$

$$I_0 = 2E_0^2$$

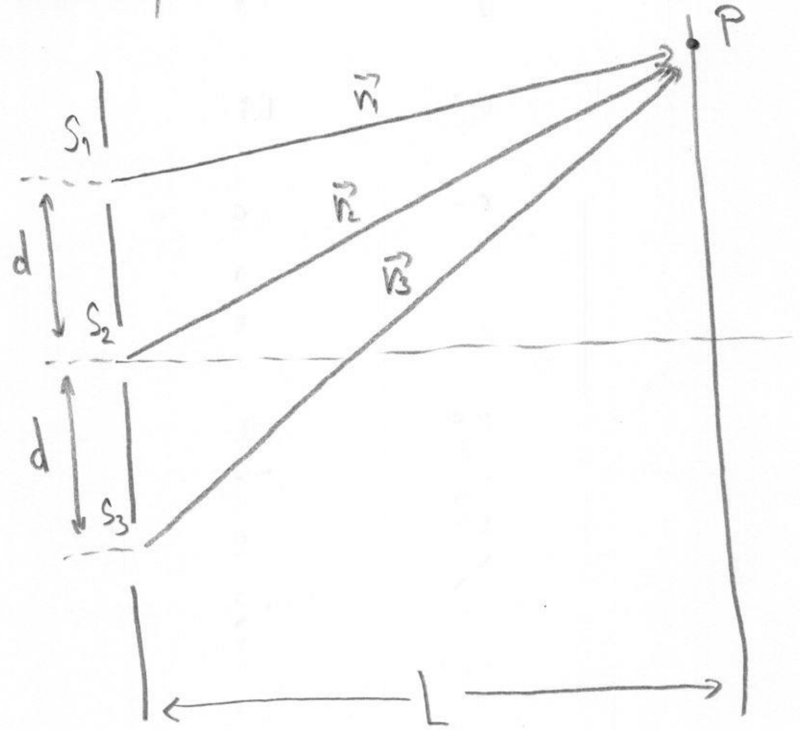


За мале углове θ, $\sin\theta \sim \theta$

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L} y\right)$$

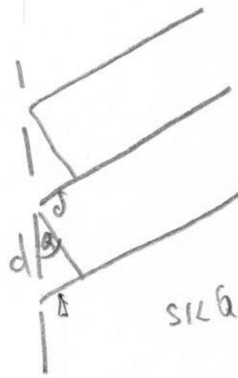
Задатак:

Нека је дат монохроматски извор кохерентне светлости који обасјава три паралелна отвора, која су на растојању d, као на слици. Одредити расподелу интензитета светлости на екрану. Који је однос интензитета примарног и секундарног максимума?



Решење:

У тачку P доспевају таласи извора S_1, S_2 и S_3. Како је у питању светлост од истог извора, таласи морају бити кохерентни, исте амплитуде, али ће имати фазну разлику:



$$\sin\theta = \frac{\Delta}{d}$$

$$E_1 = E_0 \sin\omega t$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$E_3 = E_0 \sin(\omega t + 2\varphi)$$

Користимо: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$E_1 + E_3 = E_0\left[\sin\omega t + \sin(\omega t + 2\varphi)\right] = 2E_0\cos\varphi\,\sin(\omega t+\varphi)$$

$$E = E_2 + E_1 + E_3 = E_0\sin(\omega t+\varphi) + 2E_0\cos\varphi\,\sin(\omega t+\varphi)$$

$$E = E_0(1+2\cos\varphi)\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

$$I \sim \langle E^2\rangle = E_0^2(1+2\cos\varphi)^2\,\cancelto{\frac{1}{2}}{\langle \sin^2(\omega t+\varphi)\rangle} = \frac{E_0^2}{2}(1+2\cos\varphi)^2$$

Максимум I је када је $\cos\varphi = 1$

$$I_0 \sim \frac{E_0^2}{2}\cdot(1+2)^2 = \frac{9}{2}E_0^2$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{(1+2\cos\varphi)^2}{9}$$

$$\frac{dI}{d\varphi} = 0$$

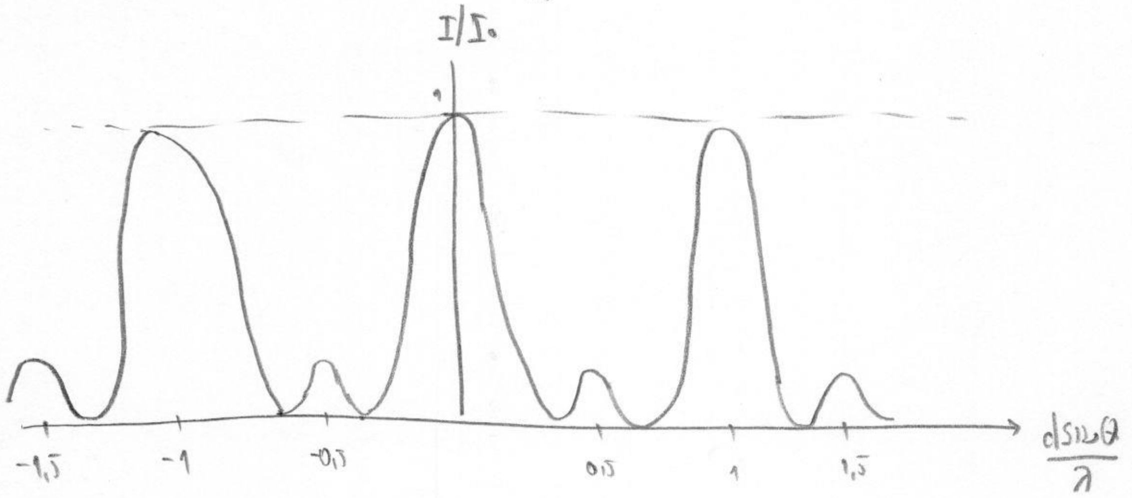
$$\frac{dI}{d\varphi} = -2\frac{I_0}{9}(1+2\cos\varphi)\cdot 2\sin\varphi$$

$1+2\cos\varphi = 0$
$\cos\varphi = -\frac{1}{2}$

$\sin\varphi = 0$
$\Downarrow$
$\cos\varphi = \pm 1$

$$I = \frac{I_0}{9}(1+2\cos\varphi)^2$$

$$I = \frac{I_0}{9}\left[1+2\cos\left(\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)\right]^2$$



Минимум интензитета је 0 и достиже се када је $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$

Услов за примарни max $\cos\varphi = +1$, када је $\frac{I}{I_0} = 1$

Секундарни max се јавља за $\cos\varphi = -1$. Услов за сек. max:

$$\varphi = (2m+1)\pi$$

$$\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} = (2m+1)\pi$$

$$\frac{d\sin\theta}{\lambda} = m+\frac{1}{2}\ ;\ m = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

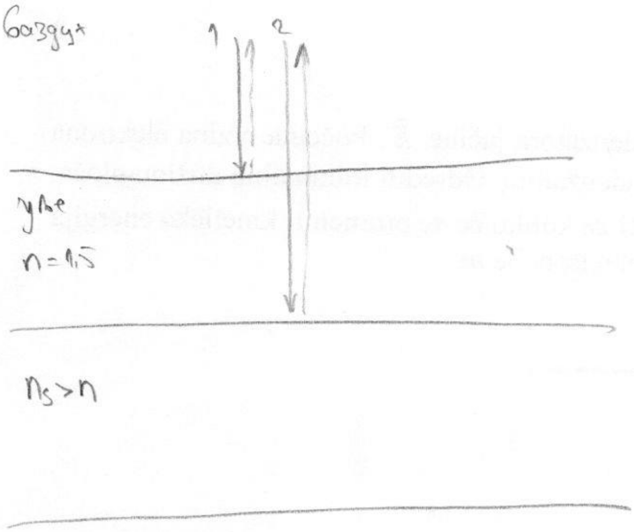
$$I_{Pmax} = I_0$$

$$I_{Smax} = \frac{I_0}{9}$$

$$\frac{I_{Pmax}}{I_{Smax}} = 9$$

Задатак

Паралелан сноп светлости, који садржи таласне дужине од 360-780 nm, пада нормално на слој уља дебљине $d=0{,}06\,\mu m$ индекса преламања $n=1{,}5$. Слој уља је нанет на стаклену плочу ($n_s>n$). Које таласне дужине посматрач неће видети услед поништавања при интерференцији?



$\delta_1 \longrightarrow \delta_1 \pm \pi \qquad + \frac{\lambda}{2}$ $\qquad\qquad \lambda = 360\,nm$

$\delta_2 \longrightarrow \delta_2 \pm \pi \qquad + \frac{\lambda}{2}$

$$\Delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 2nd$$

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda = 2nd$$

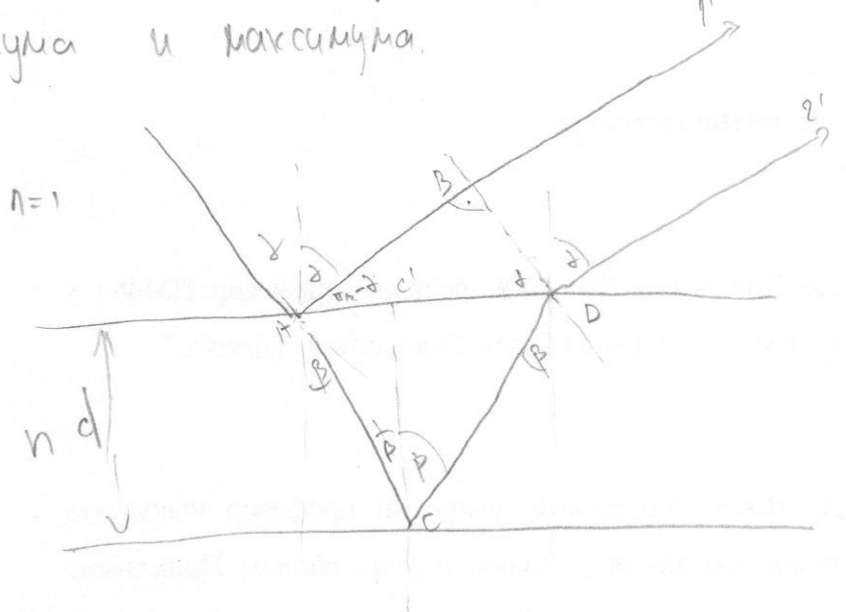
$$\lambda = \frac{2nd}{m+\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = \frac{2\cdot 1{,}5\cdot 0{,}06\,\mu m}{0+\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = \frac{3\cdot 6\,\mu m}{\frac{1}{2}} = 0{,}36\,\mu m$$

Задатак

Светлосни зрак таласне дужине λ пада на танку прозирну плочицу, индекса преламања n и дебљине d. Делимично се одбија од његове горње површине, а делимично пролази унутар плочице и одбија се од њене доње површине. На тај начин делимично може доћи до слагања са извесном путном разликом. Извести израз за путну разлику и написати услове за добијање минимума и максимума.



$\Delta ACC' \Rightarrow \cos\beta = \frac{d}{AC}$

$$\boxed{AC = \frac{d}{\cos\beta}}$$

$1' \longrightarrow n_0 AB + \frac{\lambda}{2}$

$2' \longrightarrow nAC + nCD = n2AC$

$\Delta ABD \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AB}{AD}$

$\Delta = n \cdot 2AC - n_0 AB - \frac{\lambda}{2}$

$AB = AD\sin\alpha$

$\Delta = n \cdot 2AC - AB - \frac{\lambda}{2}$

$AD = 2AC'$

$\Delta ACC' \quad tg\beta = \frac{AC'}{d}$

$AC' = d\, tg\beta$

$AD = 2d\, tg\beta$

$$AB = 2d \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\alpha$$

$$\Delta = n \cdot 2\frac{d}{\cos\beta} - 2d \operatorname{tg}\beta \sin\alpha - \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta = 2d\left(\frac{n}{\cos\beta} - \operatorname{tg}\beta \sin\alpha\right) - \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$m\lambda = \Delta$$

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda = \Delta$$

$$\Delta = \frac{2d}{\cos\beta}\left(n - \sin\beta \sin\alpha\right) - \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta = \frac{2d}{\cos\beta} n \left(1 - \frac{\sin\beta \sin\alpha}{n}\right) - \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos\beta}\left(1 - \frac{n \sin\beta \sin\alpha}{n^2}\right) - \frac{\lambda}{2}$$

$$\sin\alpha = n \sin\beta$$

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos\beta}\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}\right) - \frac{\lambda}{2}$$

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{n^2\sin^2\beta}{n^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{n}$$

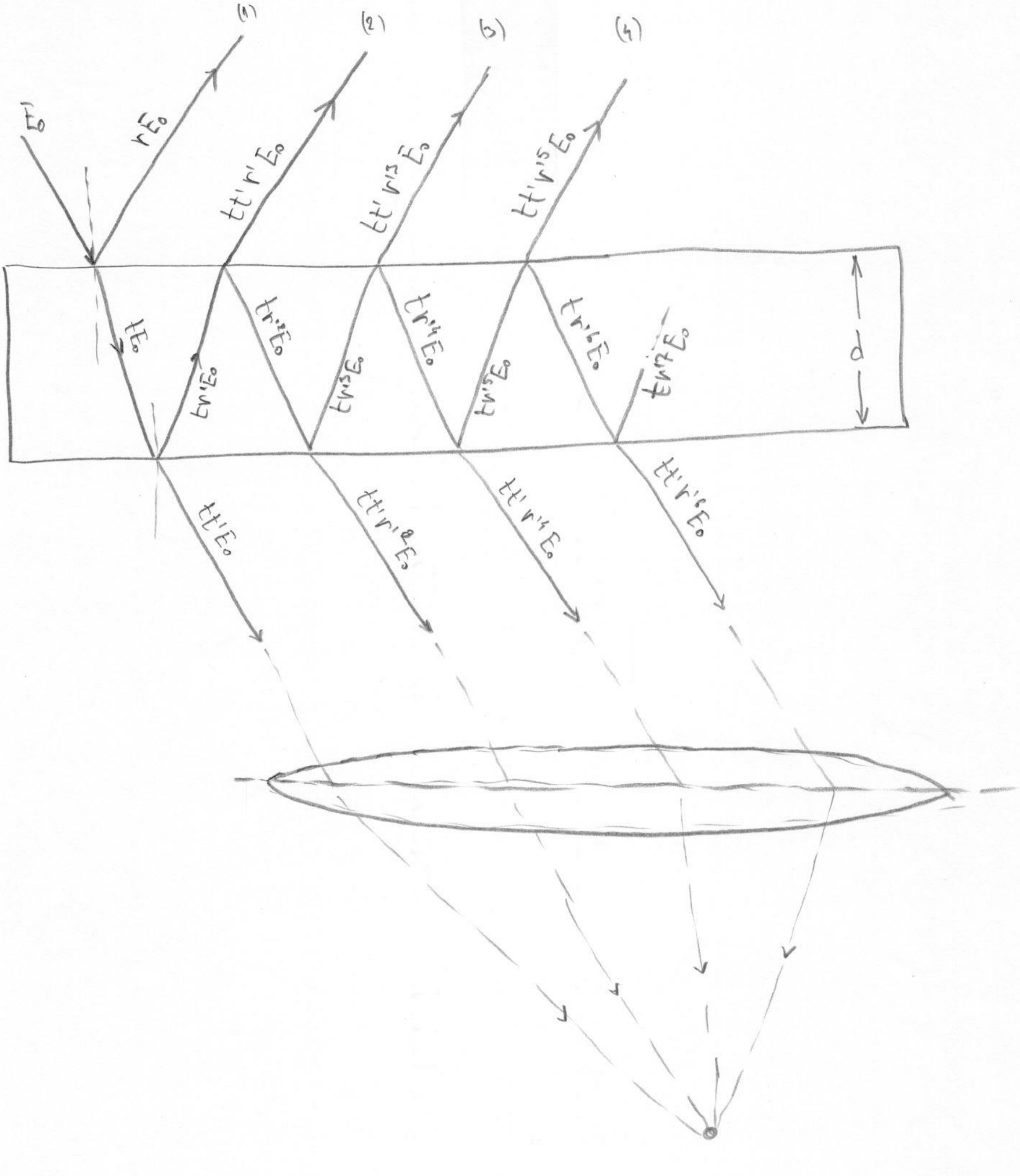
$$\Delta = \frac{2n^2 d}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}\right) - \frac{\lambda}{2} = \frac{2d}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\left(n^2 - \sin^2\alpha\right)\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} - \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2}$$

Задатак:

Дата је планпаралелна плоча дебљине d и индекса преламања n, окружена ваздухом са обе стране. Размотрити случај вишеструке рефлексије уског зрака светлости амплитуде E_0 и упадног угла θ_i. Рефлексиони и трансмисиони амплитудни коефицијенти рефлексије су r и t услед спољашње рефлексије и r' и t' услед унутрашње рефлексије. Сматрати да је упадни угао довољно мали и да зрак упада у правцу нормале, што омогућава вектору $\vec{E}$ да остаје паралелан после преламања и одбијања.

Решение:


(1)
(2)
(3)
(4)
E_0
rE_0
$tt'r'E_0$
$tt'r'^3E_0$
$tt'r'^5E_0$
tE_0
$tr'E_0$
tr'^2E_0
tr'^3E_0
tr'^4E_0
tr'^5E_0
tr'^6E_0
tr'^7E_0
d
$tt'E_0$
$tt'r'^2E_0$
$tt'r'^4E_0$
$tt'r'^6E_0$

Амплитуда сваког сегмента зрака се може добити множећи претходну амплитуду са одговарајућим коефицијентом рефлексије или трансмисије. Вишеструки паралелни зраци напуштају горњи и доњи слој плочице. Интерференција се може опазити фокусирајући зраке сабирним сочивом.

Фазна разлика је у вези са разликом оптичких дужина пута:

$$\delta = k\Delta$$

$$\Delta = 2nd\cos\theta_t$$

Нека је упадни зрак записан у комплексном облику:

$$E = E_0 e^{i\omega t}$$

Рефлектована светлост:

$$E_1 = (rE_0)\, e^{i(\omega t + k\frac{\lambda}{2})} = e^{i(\omega t + \frac{\cancel{\lambda}}{2}\cdot\frac{2\pi}{\cancel{\lambda}})} = e^{i(\omega t + \pi)} = e^{i\omega t}\cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} \quad \underline{E_1 = -(rE_0)\, e^{i\omega t}}$$

$$E_2 = (tt'r'E_0)\, e^{i(\omega t - \delta)}$$

$$E_3 = (tt'r'^3 E_0)\, e^{i(\omega t - 2\delta)}$$

$$E_4 = (tt'r'^5 E_0)\, e^{i(\omega t - 2\delta)}$$

$$\vdots$$

$$E_N = (tt'r'^{(2N-3)} E_0)\, e^{i(\omega t - (N-1)\delta)}$$

Суперпозицијом рефлектованих таласа

$$E_R = \sum_{N=1}^{\infty} E_N = r E_0 e^{i\omega t} + \sum_{N=2}^{\infty} t t' E_0 r'^{(2N-3)} e^{i[\omega t-(N-1)\delta]}$$

$$E_R = E_0 e^{i\omega t}\left[r + t t' r' e^{-i\delta} \sum_{N=2}^{\infty} r'^{(2N-4)} e^{-(N-2)\delta} \right]$$

$$E_R = E_0 e^{i\omega t}\left[r + t t' r' e^{-i\delta} \sum_{N=2}^{\infty} \left(r'^2 e^{-\delta}\right)^{N-2} \right]$$

$$\sum_{N=2}^{\infty} q^{N-2} = \sum_{N=0}^{\infty} q^N \quad , \quad q = r'^2 e^{-i\delta} \quad , \quad |q| < 1$$

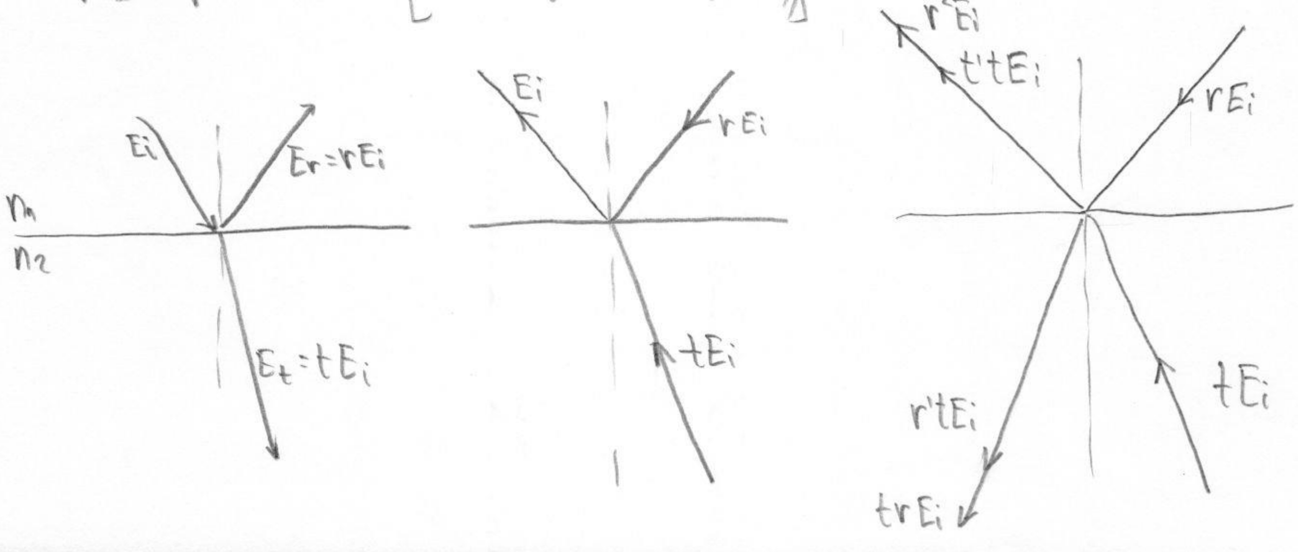
– геометријски ред и сума $S = \frac{1}{1-q}$

$$E_R = E_0 e^{i\omega t}\left[r + \frac{t t' r' e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right]$$

Стоксове релације

$$t t' = 1 - r^2 \qquad \left[\begin{array}{l} E_i = (r^2 + t't) E_i \\ 0 = (r't + tr) E_i \end{array}\right]$$

$$r = -r'$$



$$E_r = E_0 e^{i\omega t}\left[r - \frac{(1-r^2)\, r\, e^{i\delta}}{1 - r^2 e^{-i\delta}}\right]$$

$$E_r = E_0 e^{i\omega t}\left[\frac{r(1-r^2 e^{-i\delta}) - (1-r^2)\, r e^{-i\delta}}{1 - r^2 e^{i\delta}}\right]$$

$$E_r = E_0 e^{i\omega t}\left[\frac{r - \cancel{r^3 e^{-i\delta}} - r e^{-i\delta} + \cancel{r^3 e^{-i\delta}}}{1 - r^2 e^{-i\delta}}\right]$$

$$E_r = E_0 e^{i\omega t}\,\frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}}$$

Интензитет рефлектоване светлости $I_R \sim |E_R|^2$

E_R - комплексно

$$|E_R|^2 = E_R\, E_R^*$$

$$|E_R|^2 = E_0^2 r^2\, \frac{e^{i\omega t}(1-e^{-i\delta})}{(1-r^2 e^{-i\delta})}\, \frac{e^{-i\omega t}(1-e^{i\delta})}{(1-r^2 e^{i\delta})}$$

$$|E_R|^2 = E_0^2 r^2\, \frac{1 - e^{i\delta} - e^{-i\delta} + e^{-i\delta} e^{i\delta}}{1 - r^2 e^{i\delta} - r^2 e^{-i\delta} + r^4 e^{-i\delta} e^{i\delta}}$$

$$|E_R|^2 = E_0^2 r^2\, \frac{2 - (e^{i\delta} + e^{-i\delta})}{1 - r^2(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) + r^4}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$|E_R|^2 = E_0^2\, 2r^2\, \frac{1 - \cos\delta}{1 - 2r^2\cos\delta + r^4}$$

$$\frac{I_R}{I_i} = \frac{|E_R|^2}{|E_0|^2}$$

$$I_R = \frac{2r^2(1 - \cos\delta)}{1 + r^4 - 2r^2\cos\delta}\, I_i$$

На сличан начин показати да за преломљену светлост важи:

$$I_T = \left[\frac{(1-r^2)^2}{1 + r^4 - 2r^2 \cos\delta} \right] I_i$$

$$I_R + I_T = \frac{2r^2(1-\cos\delta)}{1 + r^4 - 2r^2\cos\delta} I_i + \frac{(1-r^2)^2}{1 + r^4 - 2r^2\cos\delta} I_i$$

$$= \frac{\cancel{2r^2} - 2r^2\cos\delta + 1 - \cancel{2r^2} + r^4}{1 + r^4 - 2r^2\cos\delta} I_i$$

$$= \frac{\cancel{1 + r^4 - 2r^2\cos\delta}}{\cancel{1 + r^4 - 2r^2\cos\delta}} I_i$$

$$I_i = I_R + I_T$$

Потражимо min и max рефлектоване светлости:

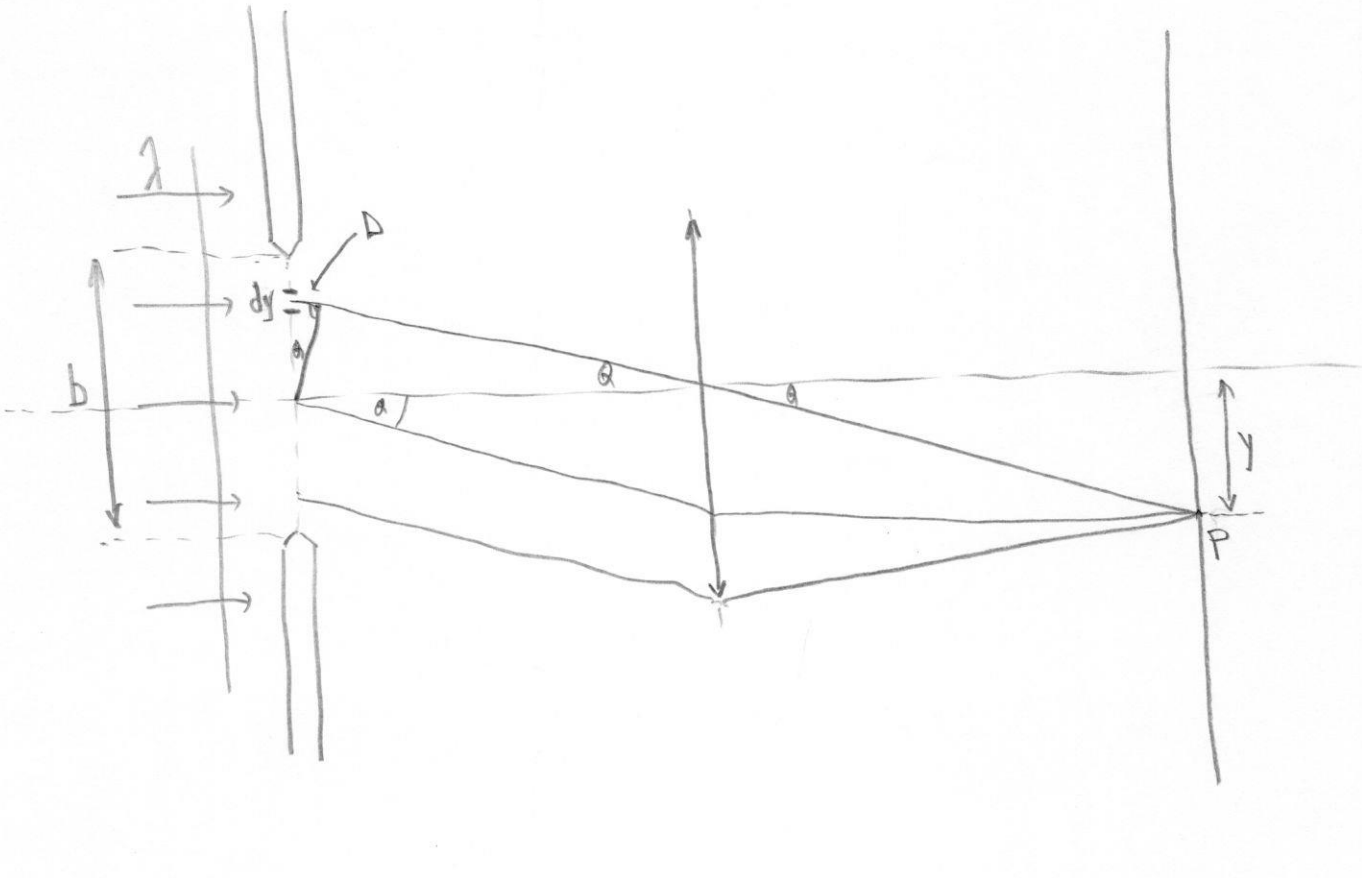
$$\frac{dI_R}{d\delta} = 0 \quad \Rightarrow \ldots \quad \sin\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\delta = \pm 1$$

$\cos\delta = 1 \quad I_{R\,min} \qquad \delta = 2\pi m \quad \Delta = 2nd\cos\theta_t = m\lambda$

$\cos\delta = -1 \quad I_{R\,max} \qquad \delta = (m + \frac{1}{2})2\pi \quad \Delta = 2nd\cos\theta_t = (m + \frac{1}{2})\lambda$

Задатак:

Извести израз за расподелу интензитета светлости у случају Фраунхоферове дифракције на једном прорезу. Прорез је у облику правоугаоника код кога је дужина доста већа од ширине, b. Таласни фронт светлости која обасјава прорез је раван. Екран на којем се посматра расподела интензитета светлости је веома удаљен, или се за посматрање дифракционе слике користи сабирно сочиво. Таласна дужина светлости је λ.



Решење:

Према Хајгенс-Френеловом принципу свака тачка прореза погођена таласом постаје извор секундарних сферних таласа. Резултантно поље у тачки P се може израчунати суперпозицијом поља свих тачкастих извора прореза.

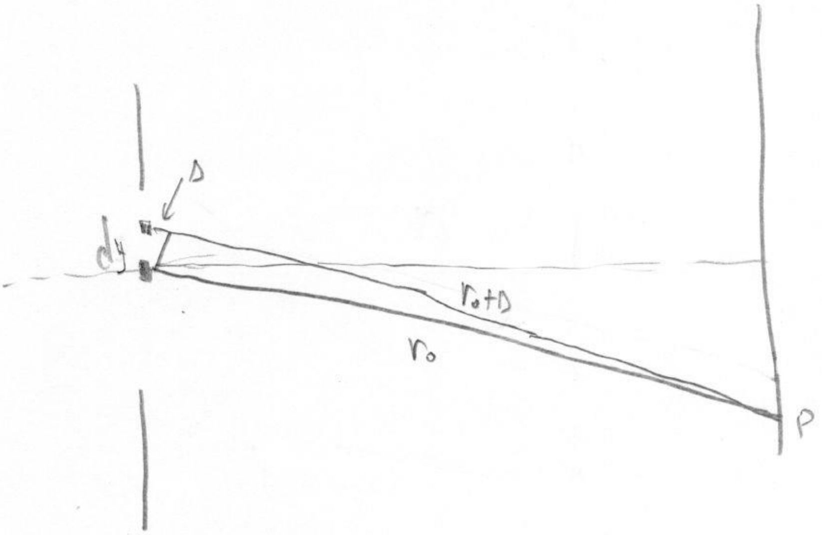
Од ds:

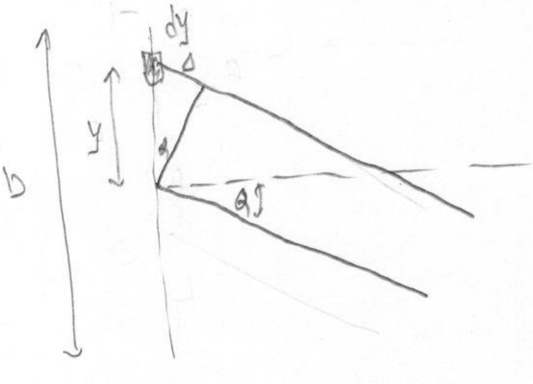
$$dE_P = \frac{E_s \cdot dy}{r} e^{i(kr-\omega t)}$$

$I_r = \frac{I_0}{4\pi r^2}$

$E_r \sim \sqrt{I_r}$

$E_r \sim \frac{1}{r}$





$$\Delta = y \sin\theta$$

$$dE_P = \frac{E_s dy}{r_0+\Delta} e^{i(k(r_0+\Delta)-\omega t)}$$

$$dE_P = \underbrace{\frac{E_s dy}{r_0+\Delta}}_{\text{амплитуда}} e^{i(kr_0-\omega t)} \cdot e^{ik\Delta}$$

$$\Delta << r_0 \Rightarrow r_0+\Delta \to r_0$$

$$dE_P = \frac{E_s dy}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} e^{iky\sin\theta}.$$

$$E_P = \int_{\text{прорез}} dE_P$$

$$E_p = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} e^{iky\sin\theta} dy$$

$$\bar{E}_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \left. \frac{e^{iky\cdot\sin\theta}}{iky\cdot\sin\theta} \right|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$\bar{E}_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \frac{e^{(ikb\sin\theta)/2} - e^{-(ikb\sin\theta)/2}}{ik\sin\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad i \qquad \beta = \frac{1}{2} kb\sin\theta$$

$$E_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \frac{b(2i\sin\beta)}{2i\beta}$$

$$E_p = \frac{E_L b}{r_0} \frac{\sin\beta}{\beta} e^{i(kr_0-\omega t)}$$

$\mathrm{sinc}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\beta}$ i β – фазна разлика

$$\delta = k\Delta$$

$$\delta = \beta = \frac{1}{2} kb\sin\theta$$

$$\Delta = \frac{b}{2}\sin\theta$$

$|\beta|$ – амплитуда фазне разлике у P између таласа који долази из центра отвора и краја отвора $|s| = \frac{b}{2}$

$$E_p = \underbrace{\frac{E_L b}{r_0} \frac{\sin\beta}{\beta}}_{E_0} e^{i(kr_0 - \omega t)}$$

Особине $\operatorname{sinc}\beta$

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{\sin\beta}{\beta} = 1$$

$$E_0 = \frac{E_L b}{r_0} \frac{\sin\beta}{\beta}$$

Мин: Нуле ф-је $\operatorname{sinc}\beta$ су када је $\sin\beta = 0$

$\beta = m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$

$\frac{1}{2}(kb\sin\theta) = m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2$

$m = 0 \to \operatorname{sinc}(\beta) = 1$

за нуле $m = \pm 1, \pm 2$

$$I \sim E_0^2$$

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$$

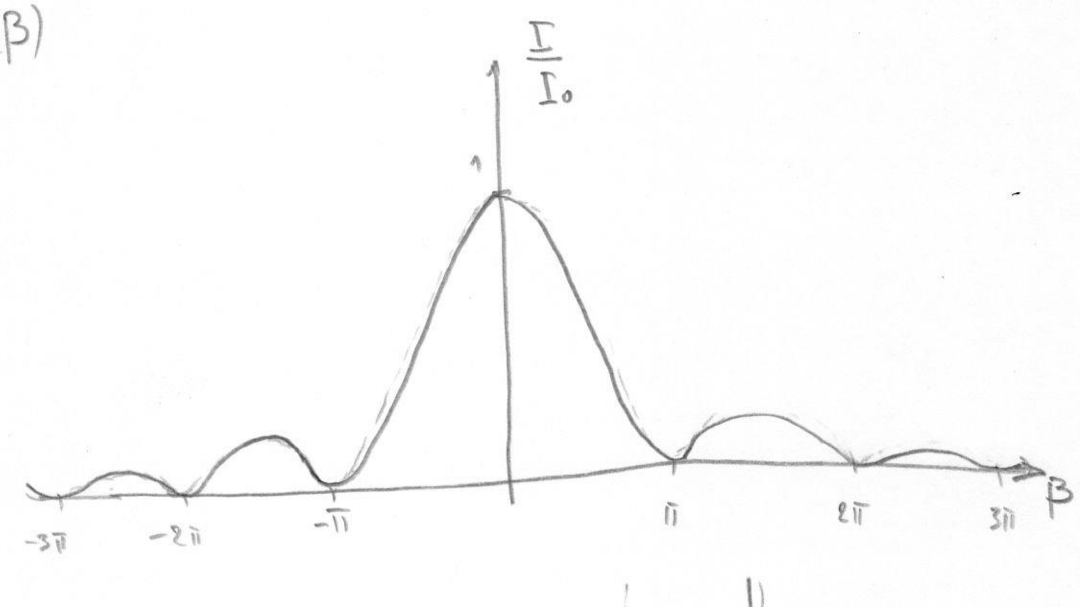
$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \frac{E_L^2 b^2}{r_0^2} \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$

$$\frac{I}{I_0} = \operatorname{sinc}^2(\beta)$$

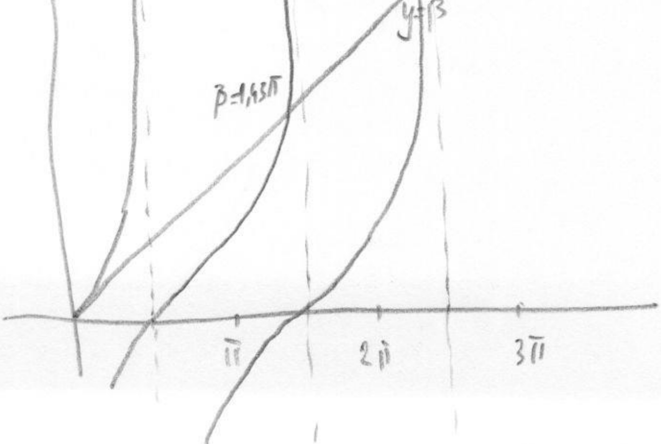
$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2(\beta)$$

$$I_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \frac{E_L^2 b^2}{r_0^2}$$



Мах: $\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) = \frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta^2} = 0$

$$\beta = \operatorname{tg}\beta$$



Мах $\beta = 1{,}43\pi$; $2{,}46\pi$; $3{,}47\pi$

Секундарни мах. се полако удаљавају ка [illegible] за веће β

Задатак:

У случају Фраунхоферове дифракције на једном правоугаоном прорезу, који је однос интензитета централног и првог секундарног максимума? Расподела интензитета је дата изразом

$$I = I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2},$$

где је $\beta = \frac{1}{2} kb \sin\theta$, где је b ширина прореза. Први секундарни мак. се јавља за $\beta = 1{,}43\pi$.

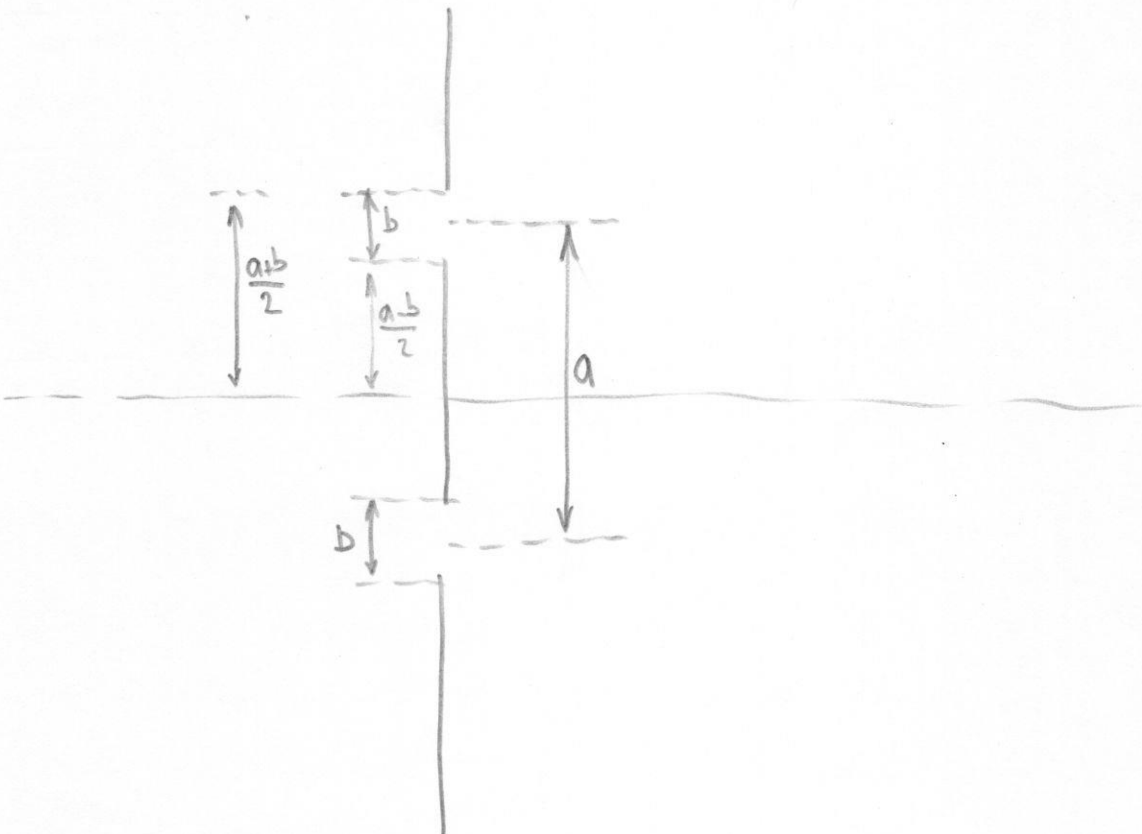
Решење:

$$\frac{I_{\beta=0}}{I_{\beta=1,43\pi}} = \frac{(\sin^2\beta / \beta^2)_{\beta=0}}{(\sin^2\beta / \beta^2)_{\beta=1,43\pi}} = \left(\frac{\beta^2}{\sin^2\beta}\right)_{\beta=1,43\pi} = \frac{20{,}18}{0{,}952} = 21{,}2$$

$$\frac{I_{\beta=1,43\pi}}{I_{\beta=0}} = \frac{1}{21{,}2} = 0{,}047 \ \hat{=}_{\%} \ 4{,}7\,\%$$

Задатак:

Одредити расподелу интензитета светлости која се формира на удаљеном екрану од веома удаљеног извора светлости. Између извора светлости и екрана се налазе два правоугаона уска отвора, чији је шематски приказ дат на слици. У обзир узети дифракцију на прорезима и интерференцију од два прореза. Екран се налази на растојању r_0 од прореза.



Решење:

Као у случају дифракције на једном уском отвору, и овде ће се формирати диф слика од сваког отвора понаособ, а затим ће доћи до интерференције таласа од два отвора. Електрично поље у тачки P на екрану ће бити сума поља од ова отвора (надовезујемо се на задатак диф. на једном отвору):

$$E_P = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \int_{-\frac{a+b}{2}}^{\frac{-a+b}{2}} e^{iyk\sin\theta} dy + \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} e^{iyk\sin\theta} dy$$

– симетрија отвора.

$$E_P = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \frac{1}{ik\sin\theta}\left[e^{\frac{1}{2}ik(-a+b)\sin\theta} - e^{\frac{1}{2}ik(-a-b)\sin\theta} + e^{\frac{1}{2}ik(a+b)\sin\theta} - e^{\frac{1}{2}ik(a-b)\sin\theta}\right]$$

$$\beta = \frac{1}{2} kb\sin\theta$$

$$\alpha = \frac{1}{2} ka\sin\theta$$

$$E_P = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \frac{b}{2i\beta}\left[e^{i\alpha}(e^{i\beta}-e^{-i\beta}) + e^{-i\alpha}(e^{i\beta}-e^{-i\beta})\right]$$

$$\sin\beta = \frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\bar{E}_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \frac{b}{2i\beta} (2i\sin\beta)(2\cos\alpha)$$

$$\bar{E}_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \frac{2b\sin\beta}{\beta} \cdot \cos\alpha$$

$$E_p = \underbrace{\frac{E_L}{r_0} \frac{2b\sin\beta}{\beta} \cos\alpha}_{\text{амплитуда}} e^{i(kr_0-\omega t)}$$

$$E_0 = \frac{E_L}{r_0} \frac{2b\sin\beta}{\beta} \cos\alpha$$

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$$

$$I = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left(\frac{2E_L b}{r_0}\right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\alpha$$

$$I = 4 \underbrace{\frac{\varepsilon_0 c}{2} \left(\frac{E_L b}{r_0}\right)^2}_{I_0} \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\alpha$$

$$I = 4 I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\alpha$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left(\frac{E_L b}{r_0}\right)^2$$

као у задатку са једним прорезом

Укупан интензитет је производ интензитета светлости услед интерференције од два прореза и дифракције на једном прорезу

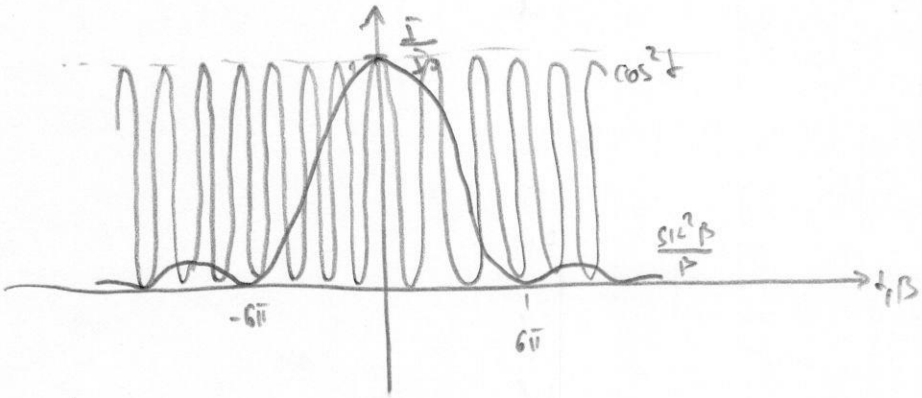
$\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$ - дифракција на једном прорезу

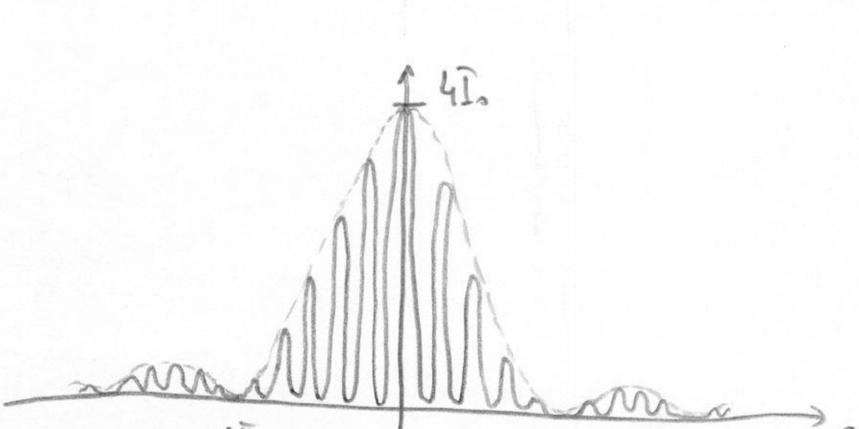
$\cos^2\alpha$ - интерференција на два прореза (Јанг)

$$\cos^2\alpha = \cos^2\left[\frac{k\, a \sin\theta}{2}\right] = \cos^2\left[\frac{\pi\, a \sin\theta}{\lambda}\right]$$

Пример $a = 6b$ или $\alpha = 6\beta$

$a > b$ $\cos^2\alpha$ се брже мења од $\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$

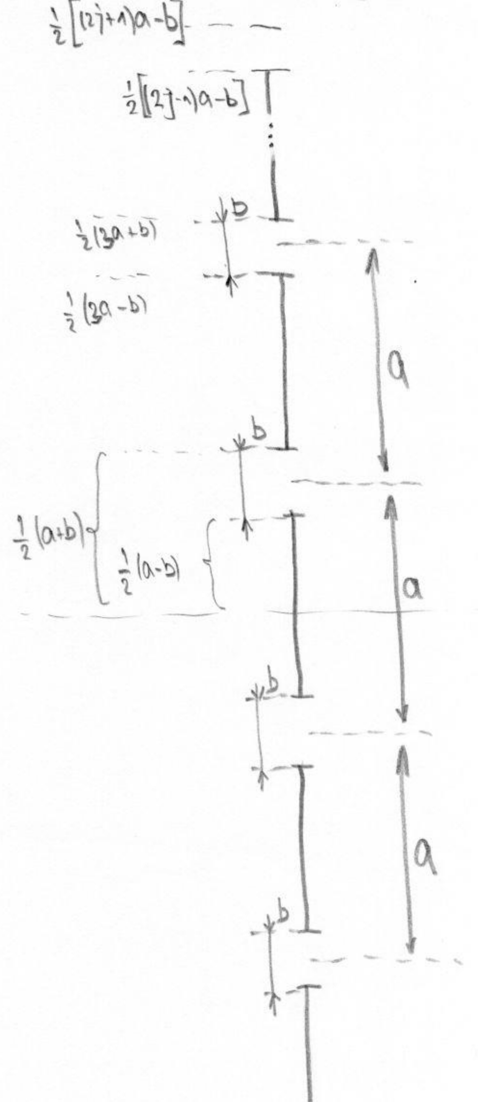


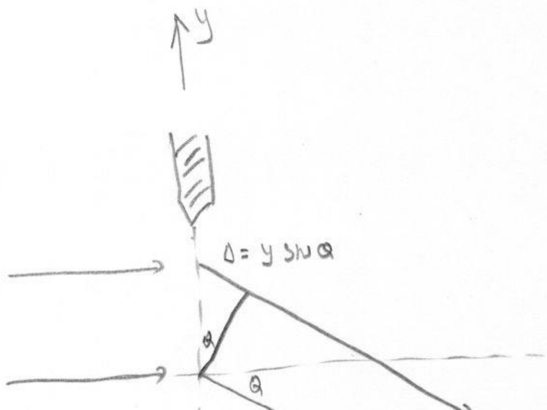


Модулација интерференције обвојницом дифракције на једном прорезу.

Задатак:

Одредити расподелу интензитета светлости на удаљеном екрану од дифракционе решетке са N прореза. Шематски приказ решетке је дат на слици.



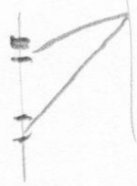


$$\delta = k\Delta$$
$$\delta = ky\sin\theta$$

Решење:

$$E_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \sum_{j=1}^{N/2} \underbrace{\left\{ \int_{[-(2j-1)a-b]/2}^{[-(2j-1)a+b]/2} e^{iyk\sin\theta}\,dy + \int_{[(2j-1)a-b]/2}^{[(2j-1)a+b]/2} e^{iyk\sin\theta}\,dy \right\}}_{I_{nt}}$$

дифракција на симетричним отворима



интерференција од свих отвора

$$I_{nt} = \frac{1}{ik\sin\theta}\left\{ e^{-ik\sin\theta[(2j-1)a-b]/2} - e^{-ik\sin\theta[(2j-1)a+b]/2} \right\}$$

$$+ \frac{1}{ik\sin\theta}\left\{ e^{ik\sin\theta[(2j-1)a+b]/2} - e^{ik\sin\theta[(2j-1)a-b]/2} \right\}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} ka\sin\theta$$

$$\beta = \frac{1}{2} kb\sin\theta$$

$$I_{nt} = \frac{b}{2i\beta}\left[e^{-i(2j-1)\alpha}\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right) + e^{i(2j-1)}\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right) \right]$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$I_{nt} = \frac{b}{2i\beta}(2i\sin\beta)\{2\cos[(2j-1)\alpha]\}$$

или

$$I_{nt} = 2b\,\frac{\sin\beta}{\beta}\,\mathrm{Re}\left[e^{i(2j-1)\alpha}\right]$$

- представимо као реални део EXP фје због суме

$$E_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \underbrace{\sum_{j=1}^{N/2} 2b \frac{\sin\beta}{\beta} \mathrm{Re}\left[e^{i(2j-1)\delta}\right]}_{S}$$

$$S = \sum_{j=1}^{N/2} 2b \frac{\sin\beta}{\beta} \mathrm{Re}\left[e^{i(2j-1)\delta}\right]$$

$$S = 2b \frac{\sin\beta}{\beta} \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{N/2} e^{i(2j-1)\delta}$$

$$S = 2b \frac{\sin\beta}{\beta} \underbrace{\mathrm{Re}\left[e^{i\delta} + e^{i3\delta} + e^{i5\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta}\right]}_{S'}$$

Геометријски ред од n чланова

$$\sum_{i=1}^{n} a_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

$a = e^{i\delta}$ - први члан

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{i3\delta}}{e^{i\delta}} = e^{i2\delta}$$

$$S' = e^{i\delta} \frac{(e^{2i\delta})^{\frac{N}{2}} - 1}{e^{2i\delta} - 1} = \frac{e^{iN\delta} - 1}{e^{i\delta} - e^{-i\delta}} = \frac{\cos N\delta + i\sin N\delta - 1}{2i\sin\delta} = \frac{\cos N\delta - 1 + i\sin N\delta}{2i\sin\delta} \frac{i}{i}$$

$$S' = \frac{i(\cos N\delta - 1) - \sin N\delta}{-2\sin\delta}$$

$$\mathrm{Re}\, S' = \frac{\sin N\delta}{2\sin\delta}$$

$$S = 2b \frac{\sin\beta}{\beta} \frac{\sin N\delta}{\sin\delta}$$

$$E_p = \frac{E_L}{r_0} e^{i(kr_0-\omega t)} \frac{b\sin\beta}{\beta} \frac{\sin N\delta}{\sin\delta}$$

$$I \sim E_p^2$$

$$I = I_0 \underbrace{\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2}_{\text{дифракција}} \underbrace{\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}_{\text{интерференција}}$$

β – обвојница интензитета светлости

$\alpha = 0$, или умножак π

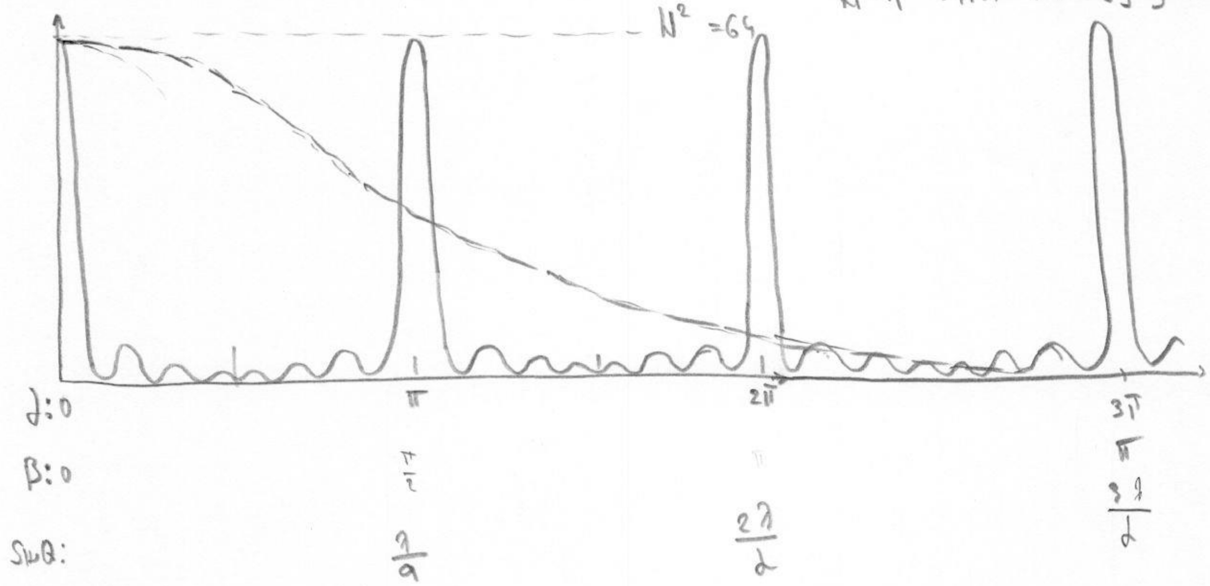
$\alpha = m\pi$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

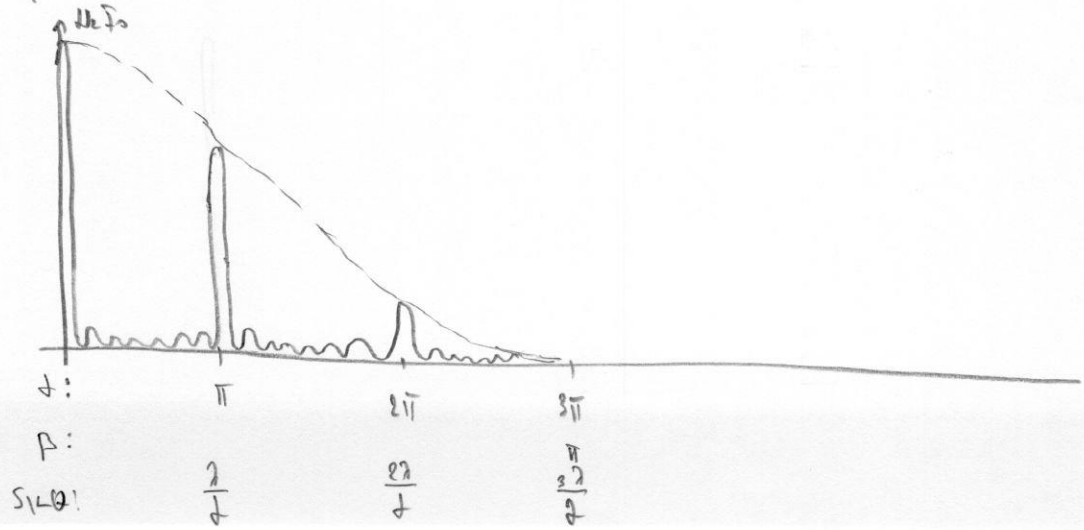
$$\lim_{\alpha \to m\pi} \frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha} = \lim_{\alpha \to m\pi} \frac{N\cos N\alpha}{\cos\alpha} = \pm N$$

Нека је $N = 8$

$N-2$ секундарна max

$N-1$ min између два главна max



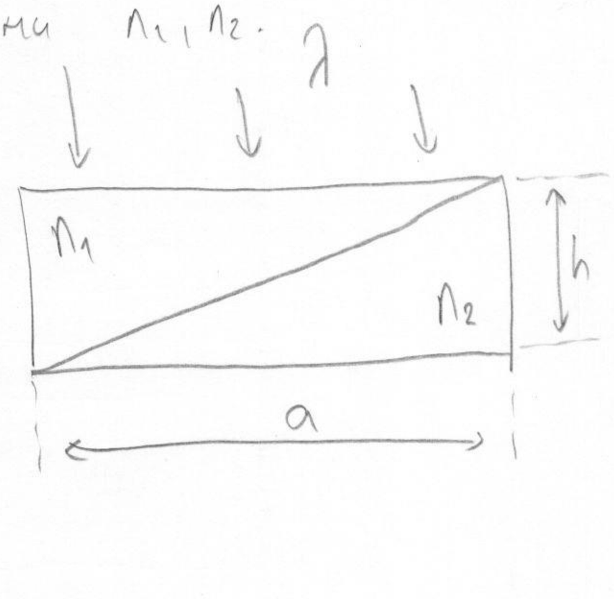


Задатак:

\- Фраунхоферова дифракција – Трансмисиона решетка 1 део

а) Нека је дат један сегмент трансмисионе дифракционе решетке као на слици. Састављен је од две врсте стакала индекса преламања n_1 и n_2, на коју пада линеарно поларизовани, равански монохроматски талас, таласне дужине λ и амплитуде A_0. Дужина сегмента решетке је a, а висина h $(a >> h)$.

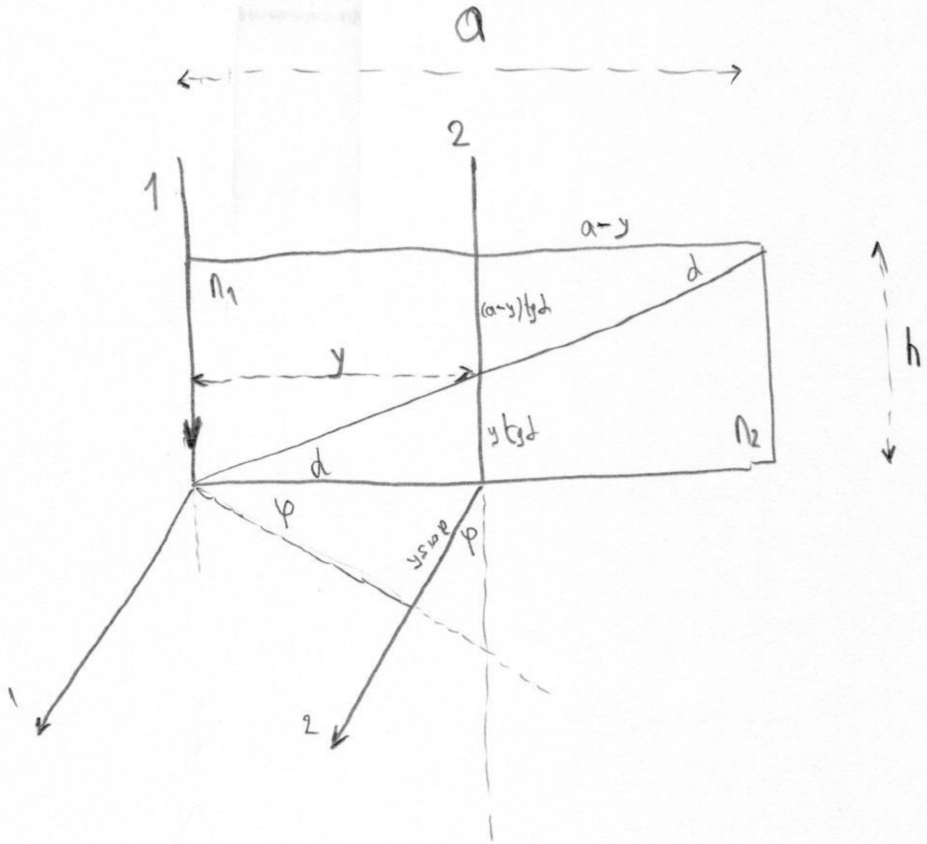
Одредити расподелу интензитета светлости на заклону у случају Фраунхоферове дифракције на једном сегменту дифракционе решетке. Занемарити преламање светлости на површини n_1, n_2.



Решене:

$$I = C \cdot |\vec{E}|^2$$

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$



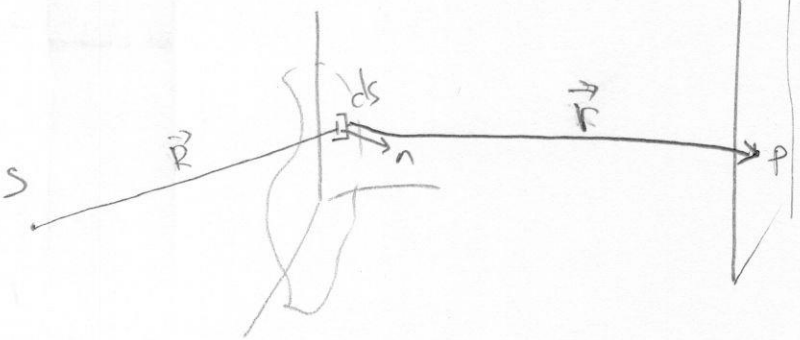
$$\Delta = n_1(a-y)\,tg\,\alpha + n_2\, y\, tg\,\alpha + y\sin\varphi - n_1 h$$

$$tg\,\alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\,tg\,\alpha$$

$$\Delta = \cancel{n_1 a \cdot tg\,\alpha} - n_1 y\, tg\,\alpha + n_2\, y\, tg\,\alpha + y\sin\varphi - \cancel{n_1 \cdot a\, tg\,\alpha}$$

$$\Delta = \left[(n_2 - n_1)\,tg\,\alpha + \sin\varphi\right] y$$

Френел - Кирхофов интеграл



$$E_P = \iint\limits_{\Sigma} -\frac{i}{\lambda}\frac{1}{rR}\, a(\beta,\vartheta)\, E\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \vec{k}\vec{R})}\, ds$$

$\vec{R} \to \infty$

$$E_P = \iint\limits_{\Sigma} -\frac{i}{\lambda}\, a(\theta,\vartheta)\, \frac{1}{r}\, E\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\, ds$$

$$a(\theta,\vartheta) = 0,5(\cos\vartheta + \cos\theta)$$

$$E_1(\varphi) = \int_0^a \frac{A_0}{a} e^{i(\omega t - k\delta)}\, dy =$$

$$= \int_0^a \frac{A_0}{a} e^{i\omega t} e^{-ik((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\varphi)y}\, dy$$

$$= \frac{A_0}{a} \frac{e^{i\omega t}}{-ik((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\varphi)} \int_0^a e^{-ik((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\varphi)y}\, d([-ik(n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\varphi]y)$$

$$= \frac{A_0 e^{i\omega t}}{-ik((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\varphi)a}\left(e^{-ik((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\varphi)a} - 1\right)$$

$$|E_1(\varphi)|^2 = E_1(\varphi)\, E_1^*(\varphi) =$$

$$= \frac{A_0^2 \left(e^{-ik[(n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha]a} - 1\right)\left(e^{ik[(n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha]a} - 1\right)}{\left(k\left((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha\right)\cdot a\right)^2} \cancel{e^{i\omega t}} \cdot \cancel{e^{-i\omega t}}$$

$$= \frac{A_0^2 \left(2 - e^{-ik((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha)a} - e^{+ik((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha)a}\right)}{\left(k\left((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha\right)\cdot a\right)^2} =$$

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{A_0^2 \left(2 - 2\cos\left[k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha)a\right]\right)}{\left(k\left((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha\right)\cdot a\right)^2}$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \quad \Rightarrow \quad 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$= A_0^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\varphi)a}{2}\right)}{\frac{k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\varphi)a}{2}} \right)^2$$

$$I_1(\varphi) = CA_0^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{k((n_2-n_1)\,tg\,\alpha + \sin\varphi)a}{2}\right)}{\frac{k((n_2-n_1)\,tg\,\alpha + \sin\varphi)a}{2}} \right)^2$$

Други начин: У реалном домену јачина поља је:

$$E_1(\varphi) = \int_0^a \frac{A_0}{a} \cos\left(\omega t - k((n_2-n_1)\,tg\,\alpha + \sin\varphi)y\right) dy$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad \ldots$$

$$E_1(\varphi) = \frac{\sin\left(\frac{k((n_2-n_1)\,tg\,\alpha + \sin\varphi)a}{2}\right)}{\frac{k((n_2-n_1)\,tg\,\alpha + \sin\varphi)a}{2}} \cdot \cos\left(\omega t - k((n_2-n_1)\,tg\,\alpha + \sin\varphi)\,a\right)$$

$$E_1(\varphi) = A_1 \cdot \cos\left(\omega t - k(n_2-n_1)\,tg\,\alpha + \sin\varphi)a\right)$$

$$I_1(\varphi) = CA_1^2 = CA_0^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{(k(n_2-n_1)\,tg\,\alpha + \sin\varphi)a}{2}\right)}{\frac{(k(n_2-n_1)\,tg\,\alpha + \sin\varphi)a}{2}} \right)^2$$

– Фраунхоферова дифракција – Трансмисиона решетка 2 део

б) Нека је дата трансмисиона решетка која се састоји од N сегмената у делу а) задатка. Одредити:

1) Расподелу интензитета светлости на екрану

2) Услов за формирање главних максимума

3) Који услов треба да задовољавају величине λ, n_1, n_2 и h, тако да однос интензитета првог (првог реда) десног главног максимума и главног максимума нултог реда буде једнак $\frac{1}{2}$.

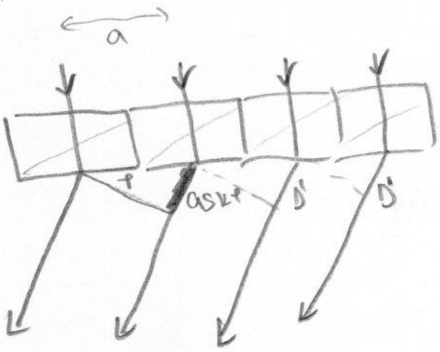
4) Који услов треба да задовољава однос $\frac{h}{a}$ тако да први леви главни максимум буде најсјајнији

Решење:

Јачина поља целе решетке је:

$$E(\varphi) = E_1(\varphi) + E_1(\varphi) e^{ika\sin\varphi} + E_1(\varphi) e^{ik2a\sin\varphi} + \dots + E_1(\varphi) e^{ik(N-1)a\sin\varphi}$$

$\Delta' = a\sin\varphi$ - путна разлика између два сегмента решетке:



$$\sum_{m=0}^{N-1} q^m = \frac{1-q^N}{1-q}$$

$$E(\varphi) = E_1 \frac{1-e^{iNka\sin\varphi}}{1-e^{ika\sin\varphi}}$$

$$|E(\varphi)|^2 = E(\varphi)\,E^*(\varphi) =$$

$$= |E_1(\varphi)|^2 \frac{\left(1-e^{iNka\sin\varphi}\right)\left(1-e^{-iNka\sin\varphi}\right)}{\left(1-e^{ika\sin\varphi}\right)\left(1-e^{-ika\sin\varphi}\right)} =$$

$$= |E_1(\varphi)|^2 \frac{2-e^{-iNka\sin\varphi}-e^{iNka\sin\varphi}}{2-e^{ika\sin\varphi}-e^{-ika\sin\varphi}} =$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$= |E_1(\varphi)|^2 \frac{1-\cos(Nka\sin\varphi)}{1-\cos(ka\sin\varphi)} \quad ; \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$= |E_1(\varphi)|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{Nka\sin\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{ka\sin\varphi}{2}\right)}$$

$$I(\varphi) = C A_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha+\sin\varphi)a}{2}\right)}{\left(\frac{k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha+\sin\varphi)a}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{Nka\sin\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{ka\sin\varphi}{2}\right)}$$

2) Положаји главних максимума:

$$\frac{ka\sin\varphi}{2} = m\pi$$

$$\lim_{x\to m\pi} \frac{\sin^2(Nx)}{\sin^2 x} = N^2 \quad m=0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$a\sin\varphi = m\lambda$$

Положаји минимума:

$$\frac{k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\varphi)a}{2} = m'\pi, \quad m' = \pm1, \pm2, \dots$$

јачина светлости од појединачних сегмената је нула

Између главних max налази се $N-1$ додатних min

$$\frac{Nka\sin\varphi}{2} = m''\pi \; ; \quad a\sin\varphi = \frac{m''\lambda}{N}, \quad m'' = \pm1, \pm2 \quad \wedge \quad \frac{m''}{N} = \underset{\text{главни max}}{\underset{\uparrow}{m}}$$

Између $N-1$ min јављају се $N-2$ додатних max

3) Интензитети max главних, нултог и првог реда

$$I(\varphi_0) = CA_0^2\left(\frac{\sin\left(\frac{k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha)a}{2}\right)}{\frac{k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha)a}{2}}\right)^2 N^2 \; ; \quad I(\varphi_1) = CA_0^2\left(\frac{\sin\left(\frac{k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha)a}{2}+\pi\right)}{\frac{k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha)a}{2}+\pi}\right)^2 N^2$$

$$\frac{I(\varphi_1)}{I(\varphi_0)} = \frac{1}{2} = \left(\frac{ka(n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha}{ka(n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + 2\pi}\right)^2$$

...

$$\lambda = (n_2-n_1)(\sqrt{2}-1)h$$

~~Фраунхоферова дифракција :~~

$$\cancel{E(\varphi) = \int_0^a \frac{A_0}{a} e^{i\omega t - ik\Delta}}$$

4) Max је $\frac{\sin x}{x}$ $\quad x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\frac{k((n_2-n_1)\operatorname{tg}\alpha + \sin\varphi)a}{2} = 0$$ - услов за најсјајнији max

услов за први леви ~~max~~ главни max је:

$$\frac{ka\sin\varphi}{2} = -\pi$$ и он ће бити

најсјајнији ако је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a} = \frac{\lambda}{a(n_2-n_1)}$$

З. 36. (Збирка задатака из физике) **Задатак**

Монохроматски сноп рендгенских зрака таласне дужине $\lambda = 0{,}72\,\mathring{A}$ пада на површину кристала бакра. Удаљеност кристалних равни (које су паралелне површини) износи $d = 1{,}804\,\mathring{A}$.

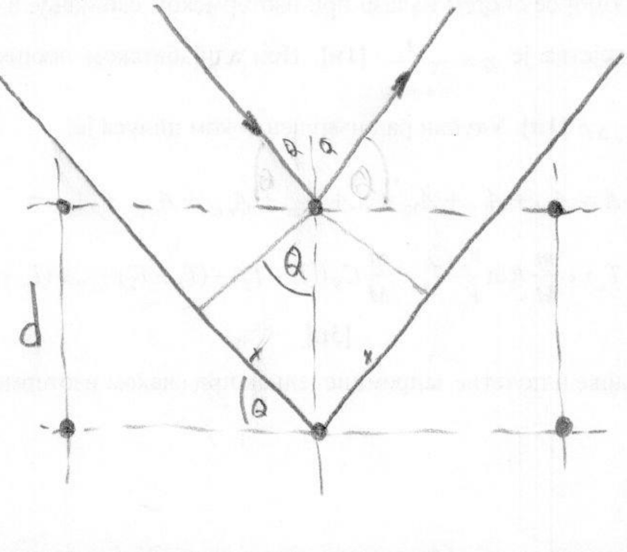
а) Одредити угао под којим се према површини јавља први максимум дифракције у рефлектованом зрачењу.

б) Наћите максимални могући ред дифракције.

в) Колика је минимална удаљеност кристалних равни која би се могла одредити коришћењем овог зрака?

г) Колика је енергија овог зрачења и каква је у поређењу са енергијом фотона видљиве светлости

Решење:



а) Брагов услов дифракције

$$2d\sin\theta = k\lambda$$

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right) = 11{,}5^\circ$$

б) $k \to max$

$\theta \to 90^\circ$

$\sin\theta = 1$

$$k_{max} = \frac{2d}{\lambda} = 5$$

в) $2d\sin\theta = k\lambda$

$d \to min$ када је $k=1$ и $\theta = 90^\circ$

$$d_{min} = \frac{\lambda}{2} = 0{,}36\ Å$$

г) $E = h\nu$ За видљиву светлост

$\nu = \frac{c}{\lambda}$ $1{,}5\ eV - 3\ eV$

$$E = h\frac{c}{\lambda} \approx 2{,}75\cdot 10^{-15}\ J$$

$$E = 2{,}75\cdot 10^{15}\cdot 1{,}6\cdot 10^{19}\ eV$$

$$E \approx 17\ keV$$

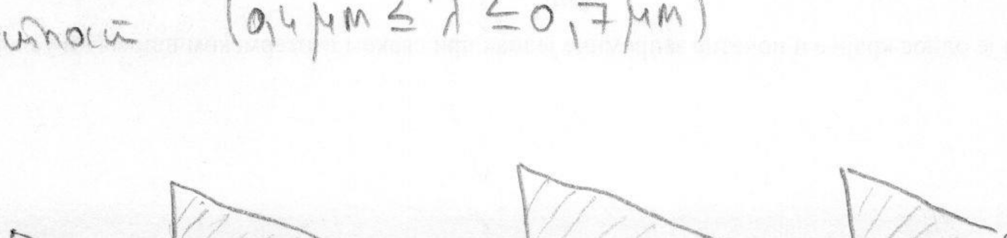
3.32. (Збирка задатака из физике) <u>Задатак</u>

Како би се добила велика моћ разлагања, често се праве дифракционе решетке које рефлектују светлост у неком смеру, под неким углом. Удубљења таквих решетки направљена су тако да већи део упадне светлости рефлектују у одређеном смеру.

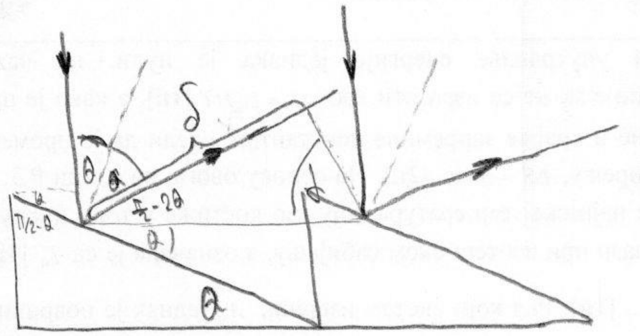
а) Одредите у ком смеру дифракциони сноп има највећи интензитет ако је упадна светлост управна на хоризонталну раван.

б) Нађите ред дифракције у којем светлост таласне дужине $\lambda = 0{,}55\ \mu m$ има највећи интензитет под углом $2\theta = 30^\circ$, ако је константа решетке $d = 0{,}11\ mm$.

в) Оцените приближно интервал угла у којем би решетка формирала интерференциону слику за видљиву светлост $(0{,}4\ \mu m \le \lambda \le 0{,}7\ \mu m)$



a)



$$\delta = d \sin \alpha$$

$$\delta = k\lambda \Rightarrow \max.$$

$$k\lambda = d \sin \alpha$$

$$\alpha = 2\theta$$

$$k\lambda = d \sin 2\theta$$

$$d \sin 2\theta = k\lambda$$

Највећи интензитети (максимуми) ће бити у смеру 2θ у којем ће се налазити максимум дифракције k-тог реда за светлост таласне дужине λ.

б) $k = \dfrac{d \sin 2\theta}{\lambda} = 100$

Највећи интензитет има дифракциона слика 100. реда. Како се моћ разлагања повећава са редом дифракције, ова решетка има предност над једноставном решетком чији би интензитет дифракционе слике стотог реда био занемарљиво мали.

в) $d \sin 2\theta = k\lambda$

$2d \cos 2\theta \, d\theta = k \, d\lambda$

$\dfrac{d\theta}{d\lambda} = \dfrac{k}{2d\cos 2\theta}$

$\dfrac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} \approx \dfrac{k}{2d\cos 2\theta}$

$\Delta\theta = \dfrac{k\Delta\lambda}{2d\cos 2\theta}$

За видљиву светлост:

$\Delta\lambda = (0{,}7 - 0{,}4)\,\mu m$

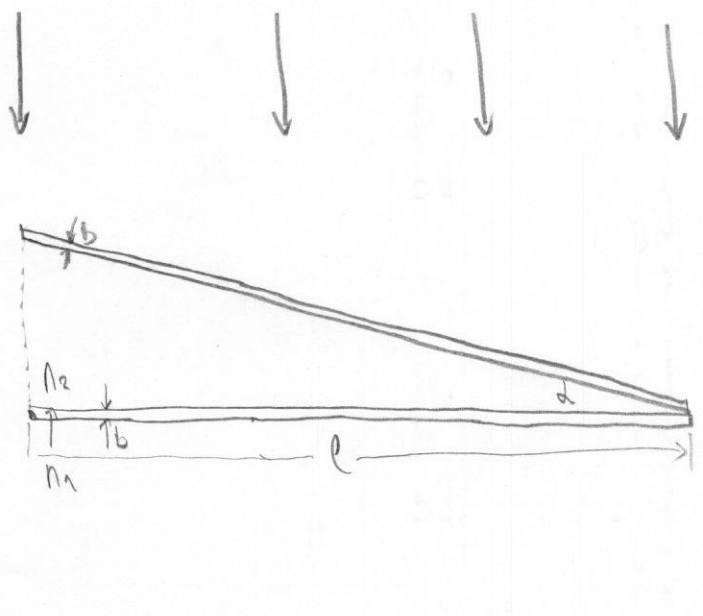
$\Delta\lambda = 0{,}3\,\mu m$

$\Delta\theta \approx 9^\circ$

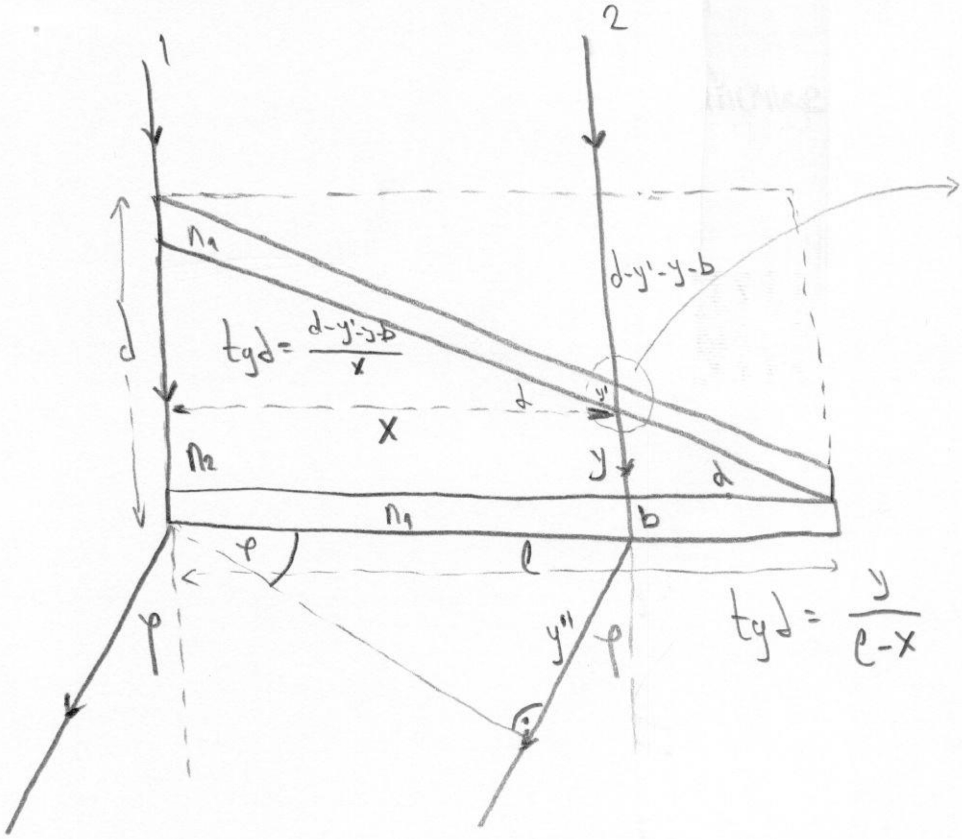
Интервал угла у коме се формирају максимуми видљиве светлости је већи за виши ред дифракције, тј. за веће θ

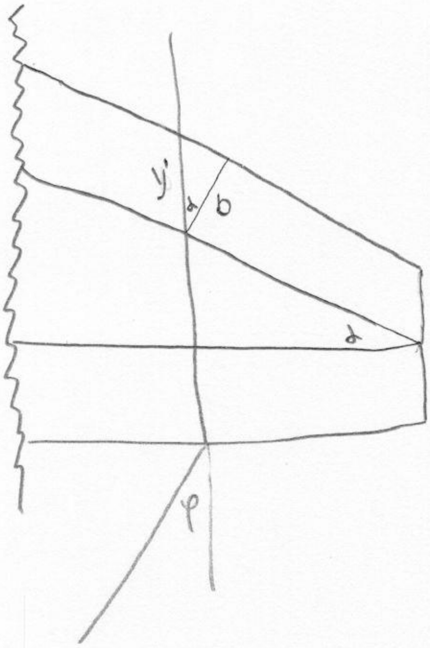
Задатак

Две паралелне стаклене плочице индекса преламања n_1 и дебљине b, формирају клин са углом α ($\alpha \ll 1$) и дужине l, као на слици. Простор између плочица напуњен је глицерином индекса преламања n_2. Нормално на клин пада сноп монохроматске светлости таласне дужине λ и амплитуде A_0. Одредити расподелу интензитета преломљене светлости на удаљеном екрану (случај Фраунхоферове дифракције).



Решенье:





$$\cos\alpha = \frac{b}{y'}$$

$$y' = \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{d-y'-y-b}{x} \qquad tg\alpha = \frac{y}{l-x}$$

$$\sin\varphi = \frac{y''}{x} \qquad y = (l-x)\,tg\alpha$$

$$\Delta = \underbrace{(d-y'-y-b) + \cancel{n_1 y'} + n_2 y + \cancel{n_1 b} + y''}_{2} -$$

$$- \left(\cancel{n_1 y'} + n_2(d-y'-b) + \cancel{n_1 b}\right)$$

$$\Delta = (d-y'-y-b) + n_2 y + y'' - n_2(d-y'-b)$$

$$\Delta = (d-y'-b) - y + n_2 y + y'' - n_2(d-y'-b)$$

$$\Delta = (d - y' - b)(1 - n_2) + y(n_2 - 1) + y''$$

$$\Delta = (l - x)\,tg\alpha\,(n_2 - 1) + x\sin\varphi - \left(d - \frac{b}{\cos\alpha} - b\right)$$

$$d = l\,tg\alpha$$

$$\Delta = \underline{l\,tg\alpha\,(n_2 - 1)} - x\,tg\alpha\,(n_2 - 1) + x\sin\varphi \underline{- l\,tg\alpha} + b\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right)$$

$$\Delta = x\sin\varphi - x\,tg\alpha\,(n_2 - 1) - l\,tg\alpha\,(2 - n_2) + b\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right)$$

$$\Delta = \left[\sin\varphi - tg\alpha\,(n_2 - 1)\right]x + C$$

$$C = b\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right) - l\,tg\alpha\,(2 - n_2)$$

Комплексни домен:

$$E(\varphi) = \int_0^l \frac{A_0}{l} e^{i(\omega t - k\Delta)}\,dx$$

$$= \int_0^l \frac{A_0}{l} e^{i\omega t} \cdot e^{-ik[(\sin\varphi - tg\alpha(n_2 - 1))x + C]}\,dx$$

$$= \frac{A_0}{l} e^{i\omega t} e^{-ikC} \int_0^l e^{-ik[(\sin\varphi - tg\alpha(n_2 - 1)]x}\,dx$$

$$C(\varphi) = \sin\varphi - tg\alpha\,(n_2 - 1)$$

$$= \frac{A_0}{l} e^{i(\omega t - kC)} \int_0^l e^{-ikC(\varphi)x}\,dx$$

$$E(\varphi) = \frac{A_0}{l} \frac{e^{i(\omega t - kc)}}{-ik\,C(\varphi)} \int_0^l e^{-ik\,C(\varphi)x}\, d(-ik\,C(\varphi)\,x)$$

$$= \frac{A_0 e^{i(\omega t - kc)}}{-ik\,C(\varphi)\,l} \left(e^{-ik\,C(\varphi)\cdot l} - 1\right)$$

Реални домен:

$$|E(\varphi)|^2 = E(\varphi)\, E^*(\varphi)$$

$$= \frac{A_0^2\, \cancel{e^{i(\omega t - kc)}} \cdot \cancel{e^{-i(\omega t - kc)}}}{(-ik\,C(\varphi)l)\cdot(ik\,C(\varphi)l)} \left(e^{-ik\,C(\varphi)\cdot l} - 1\right)\left(e^{ik\,C(\varphi)\cdot l} - 1\right)$$

$$= \frac{A_0^2\left(2 - e^{-ik\,C(\varphi)l} - e^{ik\,C(\varphi)l}\right)}{(k\,C(\varphi)l)^2} =$$

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{A_0^2\left(2 - 2\cos(k\,C(\varphi)l)\right)}{(k\,C(\varphi)l)^2}$$

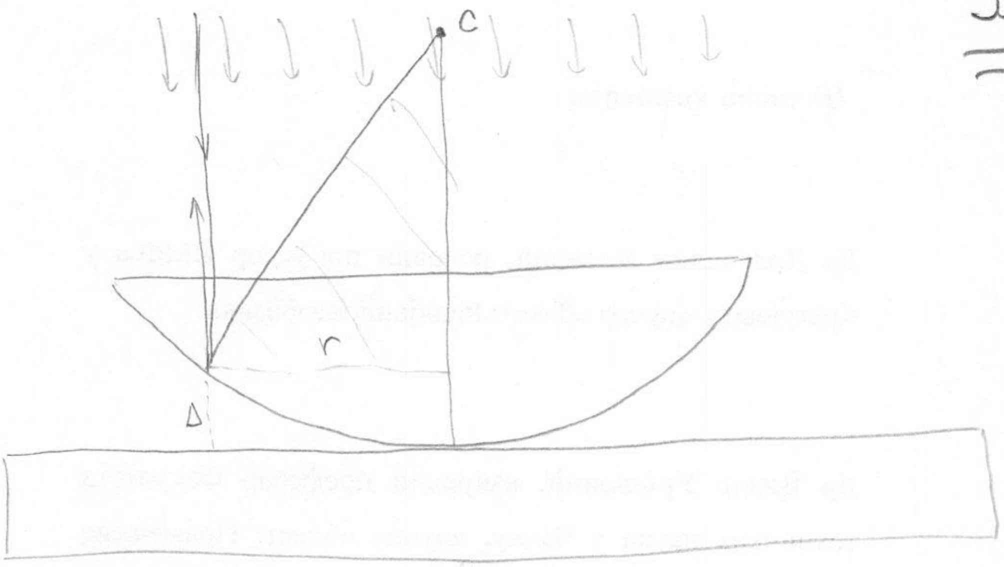
$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$= A_0^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{k\,C(\varphi)l}{2}\right)}{\frac{k\,C(\varphi)l}{2}} \right)^2$$

$$= A_0^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\sin\varphi - \operatorname{tg}\delta\,(n_2-1)}{2}\right)}{\frac{\sin\varphi - \operatorname{tg}\delta\,(n_2-1)}{2}} \right)^2$$

34. Уређај за посматрање Њутнових прстенова у рефлектованој светлости састоји се од сочива које је својом закривљеном површином наслоњено на равну стаклену плочу. Ако се сочиво одозго осветли црвеном светлошћу $\lambda = 0{,}68\ \mu m$ радијус 20-ог тамног прстена је $r_{20} = 1cm$. Израчунати радијус закривљеног сочива.

<u>Задатак</u>



$$R^2 = (R-\Delta)^2 + r^2$$

$$\cancel{R^2} = \cancel{R^2} - 2R\Delta + \cancel{\Delta^2} + r^2$$

$$2R\Delta = r^2$$

$$\Delta = \frac{r^2}{2R}$$

$$S_2 - S_1 = \Delta + \frac{\lambda}{2} + \Delta - 0$$

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda = n\,(S_2 - S_1)$$

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda = 2\Delta + \frac{\lambda}{2}$$

$$m\lambda + \cancel{\frac{\lambda}{2}} = 2\Delta + \cancel{\frac{\lambda}{2}}$$

$$2\Delta = m\lambda$$

$$2\,\frac{r^2}{2R} = m\lambda$$

$$\frac{r^2}{R} = m\lambda$$

$$R = \frac{r^2}{m\lambda}$$

$$R = \frac{1\,cm^2}{20 \cdot 0{,}68 \cdot 10^{-4}\,cm}$$

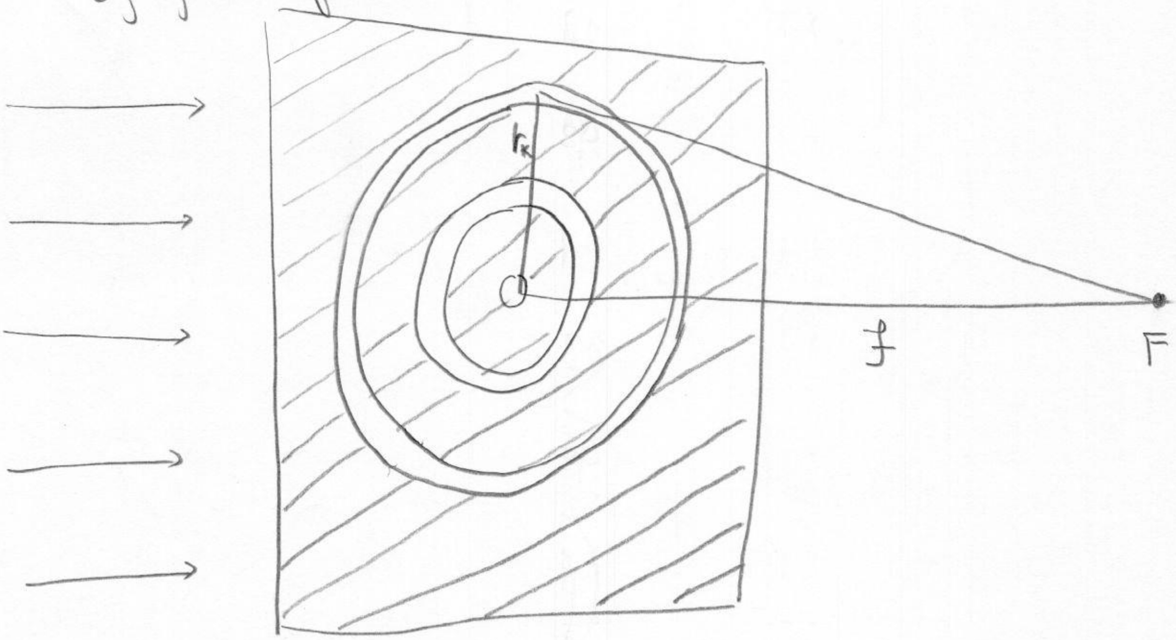
$$R = 0{,}07352 \cdot 10^4\ cm$$

$$R = 735{,}2\ cm$$

Задатак

Фотографска плоча има прозирне концентричне прстенове који су међусобно раздвојени тамним подручјима. Нормално на плочу пада паралелни сноп монохроматске светлости таласне дужине $\lambda = 0{,}605\ \mu m$.

Нађите колики требају бити радијуси прозрачних прстенова да би светлост из свих тих прстенова давала максимум интерференције у тачки F, удаљеној на 10 cm од плоче. Како се мењају размаци између суседних прстенова.



Решење:

Како је центар плоче провидан, услов за конструктивну интерференцију светлости од прстена k и оне из центра плоче, у тачки F је:

$$\Delta = \sqrt{r_k^2 + f^2} - f$$

$$\Delta = k\lambda$$

$$\sqrt{r_k^2 + f^2} - f = k\lambda \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\sqrt{r_k^2 + f^2} = f + k\lambda \quad \Big|^2$$

$$r_k^2 + \cancel{f^2} = \cancel{f^2} + 2kf\lambda + k^2\lambda^2$$

$$r_k = \sqrt{k^2 \cdot \lambda^2 + 2kf\lambda}$$

Сваки провидни прстен мора да задовољава овај услов.

За не велико k и $\lambda << f$:

$$r_k \simeq \sqrt{2kf\lambda}$$

$$r_{k+1} = \sqrt{2(k+1)f\lambda}$$

$$r_k = \sqrt{2kf\lambda}$$

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

Размаци између суседних прстенова постају све мањи.

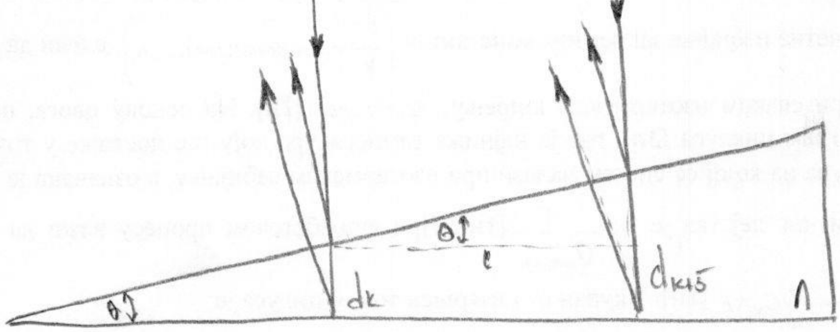
како је $f \gg \lambda$, релација даје добар опис.

Описана плоча се назива плоча са Френеловим зонама.

3.23 (Збирка задатака из физике) Задатак

Монохроматска светлост пада нормално на површину танког стакленог клина $n=1{,}5$, чије површине међусобно затварају угао $\theta=22''$. При томе се на $l=1\,cm$ дужине клина појављује $k=5$ тамних пруга. Одредити таласну дужину светлости.

Решење:



а) Разлика оптичких путева рефлектованих зрака светлости са горње и доње површине клина, на месту где је његова дебљина d_k износи:

$$\Delta = 2 d_k n + \frac{\lambda}{2}$$

Услов минимума:

$$\Delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \text{или} \quad \Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$2 d_k n + \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$2 d_k n + \frac{\lambda}{2} = k\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

$$d_k = \frac{k\lambda}{2n}$$

Са слике $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{d_{k+5} - d_k}{l}$

$$d_k = \frac{k\lambda}{2n}$$

$$d_{k+5} = \frac{(k+5)\lambda}{2n}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{(k+5)\lambda}{2n} - \frac{k\lambda}{2n}}{l}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{5\lambda}{2nl}$$

За мале углове

$\operatorname{tg}\theta \approx \theta$

$\theta \approx \frac{5\lambda}{2nl}$

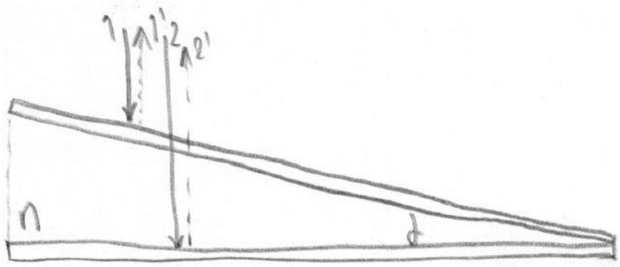
$\lambda = \frac{2nl\theta}{5}$

$\lambda = 0{,}64\,\mu m$

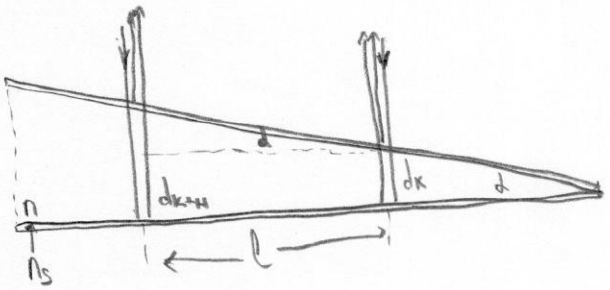
9.9. Видосав.

Задатак

Две планпаралелне стаклене плочице формирају клин са углом $\alpha = 30''$. Простор између плочица напуњен је глицерином ($n = 1{,}47$). Нормално на клин пада сноп монохроматске светлости таласне дужине $\lambda = 500$ nm. Интерференциона слика се посматра у одбијеној светлости. Колики је број N тамних интерференционих трака на $C = 1$cm дужине клина?



Решење:



$n_s > n$

$$\delta = 2d_k \cdot n + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}$$

$$\delta = 2n d_k$$

Услов за min:

$$\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$2n d_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad - \quad k\text{-ти } \min$$

$$2n d_{k+M} = \left(k + M + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Са слике

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d_{k+M} - d_k}{l}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{(k+M+\frac{1}{2})\lambda}{2n} - \frac{(k+\frac{1}{2})\lambda}{2n}}{l}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cancel{(k+\frac{1}{2})\lambda} + M\lambda - \cancel{(k+\frac{1}{2})\lambda}}{2nl}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{N\lambda}{2n\cdot l}$$

За мале углове:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$$

$$\alpha \approx \frac{N\lambda}{2nl}$$

$$N = \frac{2nl\alpha}{\lambda}$$

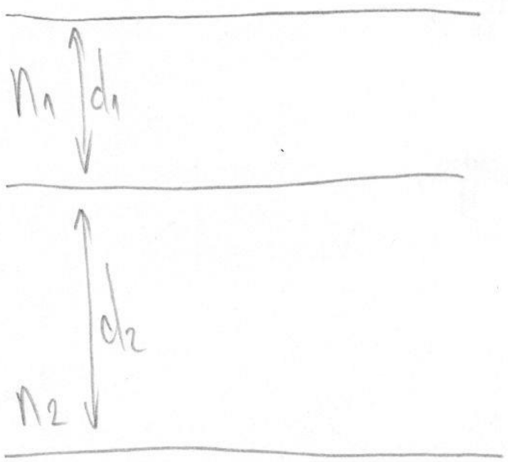
$$N = 8{,}56$$

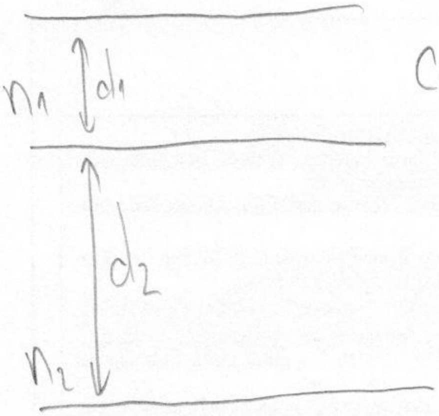
$$N = 8$$

Задатак

2.21 (Lukić Збир.)

Светлост таласне дужине 610 nm пада нормално на две плочице од стакла постављене једна на другу. Индекс преламања горње плочице је $n_1 = 1{,}41$ а доње $n_2 = 1{,}612$. Ако је време проласка светлости кроз горњу плочицу једнако времену проласка кроз доњу, израчунати у ком односу стоје дебљине плочица (d_1/d_2), као и број таласних дужина садржаних у плочицама (N_1/N_2)





$$c_1 = \frac{c}{n_1}$$

$$c_2 = \frac{c}{n_2}$$

$$c_1 = \frac{d_1}{t} \quad , \quad c_2 = \frac{d_2}{t}$$

$$d_1 = c_1 t \quad , \quad d_2 = c_2 t$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{c_1 t}{c_2 t} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{n_2}{n_1}}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = ?$$

$$N_1 = \frac{d_1}{\lambda_1} \quad , \quad N_2 = \frac{d_2}{\lambda_2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{d_1}{\lambda_1}}{\frac{d_2}{\lambda_2}} = \frac{d_1 \lambda_2}{d_2 \lambda_1}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{d_1 \frac{\lambda}{n_2}}{d_2 \frac{\lambda}{n_1}} = \frac{n_1 d_1}{n_2 d_2}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{n_1}{n_2} \frac{d_1}{d_2} = \frac{n_1}{n_2} \frac{n_2}{n_1} = 1$$

$$\boxed{\frac{N_1}{N_2} = 1}$$

2.29 (Пукић Збирка) **Задатак**

На оптичку решетку са 2400 зареза на ширини од 1cm пада монохроматска светлост таласне дужине $\lambda = 480$ nm. Израчунати број максимума који ће се појавити на заклону постављеном иза дифракционе решетке

Решење:

$$n\lambda = d\sin\vartheta$$

$\vartheta \leq 90°$

$\sin\vartheta \leq 1$

$$\frac{n\lambda}{d} \leq 1$$

$$d = \frac{1}{N}$$

N - број зареза по јединици ширине решетке

$n\lambda N \leq 1$

$$n \leq \frac{1}{N\lambda}$$

$$n \leq \frac{1}{2400\,\frac{1}{0{,}01\,m} \cdot 480 \cdot 10^{-9}\,m}$$

$n \leq 8{,}7$

$n = 8$ - ред максимума

Укупан број максимума, рачунајући и нулти је

$n_U = 2n + 1 = 17$

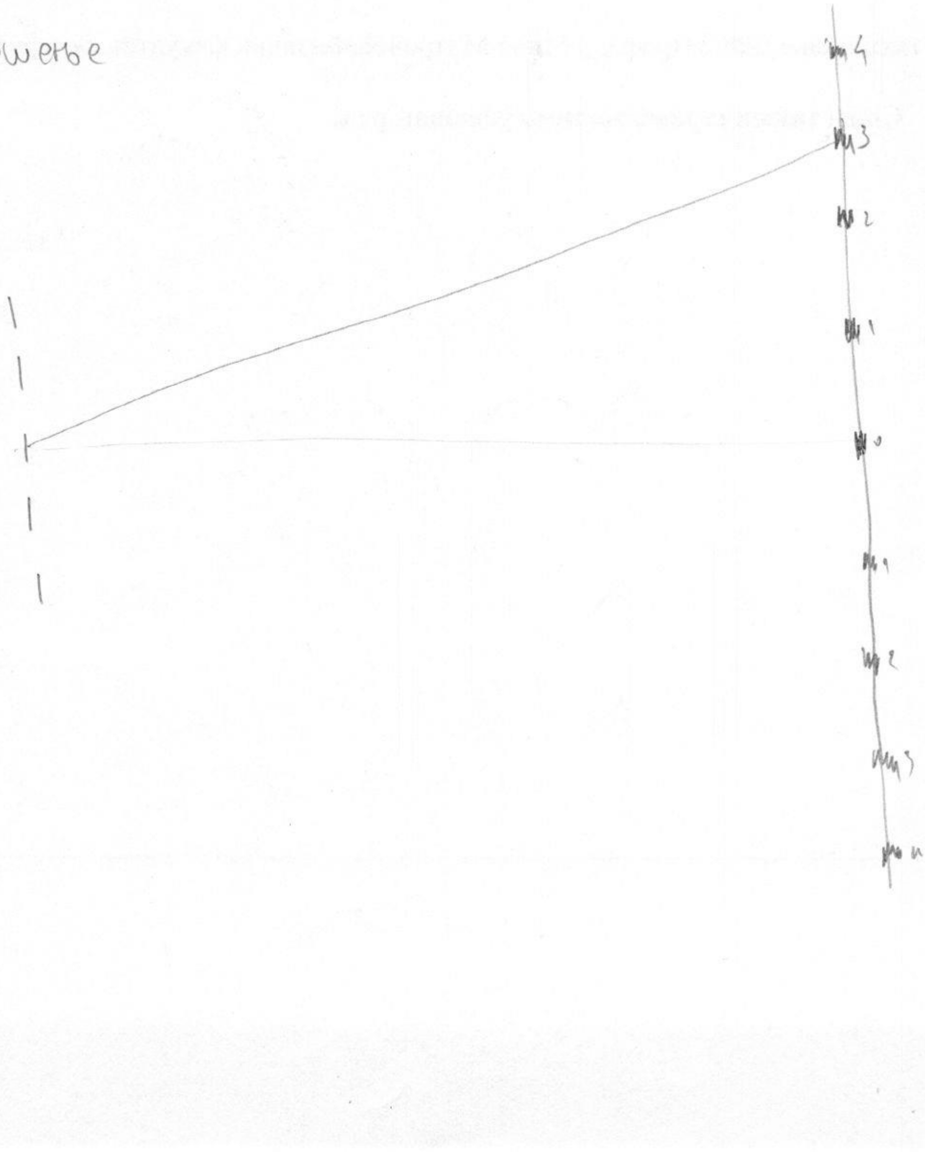
$$\boxed{n_U = 17}$$

2.30 (Пукић Збирка)

Задатак

Монохроматска светлост пада нормално на оптичку решетку и након дифракције, на заклону формира интерференционе максимуме. Ако је растојање између нултог и трећег максимума $\Delta S_3 = 46\ cm$, а између нултог и четвртог $\Delta S_4 = 69\ cm$, израчунати растојање од оптичке решетке до заклона. У ком односу стоје таласна дужина и константа оптичке решетке?

Решење



$$n\lambda = d\sin\vartheta$$

$$\sin\vartheta = \frac{\Delta s}{\sqrt{l^2+\Delta s^2}}$$

$$3\lambda = \frac{d\,\Delta s_3}{\sqrt{l^2+\Delta s_3^2}}$$

$$4\lambda = \frac{d\,\Delta s_4}{\sqrt{l^2+\Delta s_4^2}}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\dfrac{\cancel{d}\,\Delta s_3}{\sqrt{l^2+\Delta s_3^2}}}{\dfrac{\cancel{d}\,\Delta s_4}{\sqrt{l^2+\Delta s_4^2}}}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\Delta s_3\sqrt{l^2+\Delta s_4^2}}{\Delta s_4\sqrt{l^2+\Delta s_3^2}}$$

$$9\Delta s_4^2\left(l^2+\Delta s_3^2\right) = 16\Delta s_3^2\left(l^2+\Delta s_4^2\right)$$

$$9\Delta s_4^2\, l^2 + 9\Delta s_3^2\Delta s_4^2 = 16\Delta s_3^2\, l^2 + 16\Delta s_3^2\Delta s_4^2$$

$$\left(9\Delta s_4^2 - 16\Delta s_3^2\right) l^2 = 7\Delta s_3^2\Delta s_4^2$$

$$l = \Delta s_3\Delta s_4\sqrt{\frac{7}{(3\Delta s_4)^2-(4\Delta s_3)^2}}$$

$$l = 88{,}6\ \text{cm}$$

$$\frac{\lambda}{c} = 0{,}154$$

3.20 (Збирка задатака из физике) Задатак

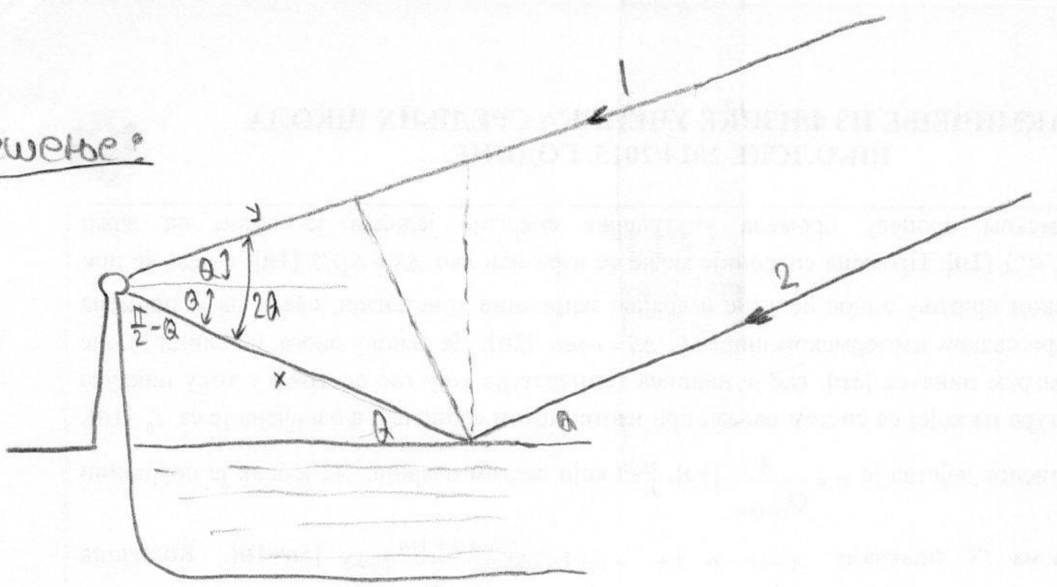
За праћење радио-звезда могу се користити одговарајући микроталасни детектори. Једна таква радиозвезда која емитује монохроматске микроталасе фреквенције $\nu = 7{,}5 \cdot 10^8\,Hz$ посматра се микроталасним детектором смештеним на ивици језера на висини $d = 1\,m$ изнад површине воде. Како се звезда подиже изнад хоризонта, детектор региструје сукцесивне минимуме и максимуме интензитета сигнала.

а) Нађите под којим углом θ над хоризонтом се налазила радио-звезда када је примећен први максимум сигнала.

б) Колики је укупни број примећених максимума у току подизања радио-звезде?

в) Како су распоређени углови θ за које се појављују максимуми сигнала?

Rešenje:



$n=1$

$$\Delta = x + \frac{\lambda}{2} - y$$

$$\sin\theta = \frac{d}{x}$$

$$x = \frac{d}{\sin\theta}$$

$$\cos 2\theta = \frac{y}{x}$$

$$y = x\cos 2\theta$$

$$y = \frac{d}{\sin\theta}\cos 2\theta$$

$$\Delta = x + \frac{\lambda}{2} - y$$

$$\Delta = \frac{d}{\sin\theta} + \frac{\lambda}{2} - \frac{d}{\sin\theta}\cos 2\theta$$

$$\Delta = \frac{d}{\sin\theta}\left(1-\cos 2\theta\right) + \frac{\lambda}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$$

$$\Delta = \frac{d}{\sin\theta}\cdot 2\sin^2\theta + \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta = 2d\sin\theta + \frac{\lambda}{2}$$

$\Delta = m\lambda$

$m = 1$

$\Delta = \lambda$ (max 1. реда)

$\lambda = 2d \sin\theta + \frac{\lambda}{2}$

$2d \sin\theta = \frac{\lambda}{2}$

$\sin\theta = \frac{\lambda}{4d}$

$\theta'_{max} = \arcsin \frac{\lambda}{4d}$

$\lambda = \frac{c}{\nu}$

$\theta'_{max} = 5^\circ 44'$

б)

Услов за max

$n\lambda = 2d \sin\theta + \frac{\lambda}{2}$

$n = \frac{2d}{\lambda} \sin\theta + \frac{1}{2}$

$\sin\theta \approx 1 \Rightarrow n = n_{max}$

$n_{max} = \frac{2d}{\lambda} + \frac{1}{2}$

$n_{max} = 5,5$

$n_{max} = 5$

в) На основу

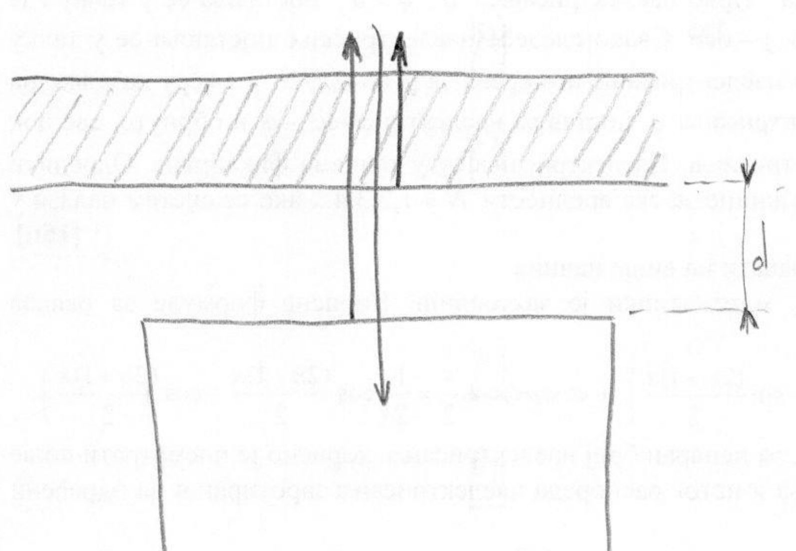
$n = \frac{2d}{\lambda} \sin\theta + \frac{1}{2}$

интервали угла између два максимума ће се повећавати са повећањем θ

9.11 (Видосав Марковић) <u>Задатак</u>

Стаклена планпаралелна плоча налази се изнад стаклене коцке тако да постоји танак ваздушни слој између њих. Зраци светлости таласних дужина од $\lambda_1 = 0{,}4\ \mu m$ до $\lambda_2 = 1{,}15\ \mu m$ падају нормално на планпаралелну плочу, рефлектују се од обе граничне површине ваздушног слоја и интерферирају. У датом подручју таласних дужина само две таласне дужине интерференцијом се појачавају. Једна од њих је $\lambda_1 = 0{,}4\ \mu m$. Нађи другу таласну дужину λ_2 и дебљину ваздушног слоја d.

Решење:



$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta = m\lambda$$

$$2d + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

$m_1 \backslash m_2$	1	2	3	4
1	1	1/3	1/5	1/7
2	3/1	1	3/5	3/7
3	5/1	5/3	1	5/7
4	7/1	7/3	7/5	1

$$2d + \frac{\lambda_1}{2} = m_1\lambda_1$$

$$2d + \frac{\lambda_x}{2} = m_2\lambda_x$$

$$m_1\lambda_1 - \frac{\lambda_1}{2} = m_2\lambda_x - \frac{\lambda_x}{2}$$

$$\frac{\lambda_1}{2}(2m_1 - 1) = \frac{\lambda_x}{2}(2m_2 - 1)$$

$$\frac{2m_1 - 1}{2m_2 - 1} = \frac{\lambda_x}{\lambda_1}$$

$m_1 \backslash m_2$	1	2	3	4
1	1	0,33	0,2	0,14
2	3	1	0,6	0,42
3	5	1,67	1	0,71
4	7	2,3	1,4	1

$$\lambda_x = \lambda_1 \frac{2m_1 - 1}{2m_1 + 1}$$

$$\lambda = 0{,}668\ \mu m$$

$$\lambda_x = \lambda_1 \quad \text{u} \quad \lambda_x = \lambda_2$$

$$2d + \frac{\lambda}{2} = m\lambda$$

$$\left(\frac{2m_1 - 1}{2m_2 - 1}\right)_{min} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1} = 1$$

$$2d = m\lambda - \frac{\lambda}{2}$$

$$d = \frac{\lambda}{4}(2m - 1)$$

$$\left(\frac{2m_1 - 1}{2m_2 - 1}\right)_{max} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2{,}875$$

$$d = \frac{0{,}4\ \mu m}{4}(2m - 1)$$

$$\lambda = \lambda_1 \quad m = m_1 = 3$$

$$d = \frac{0{,}4\ \mu m}{4}(2 \cdot 3 - 1)$$

$$d = 0{,}5\ \mu m$$

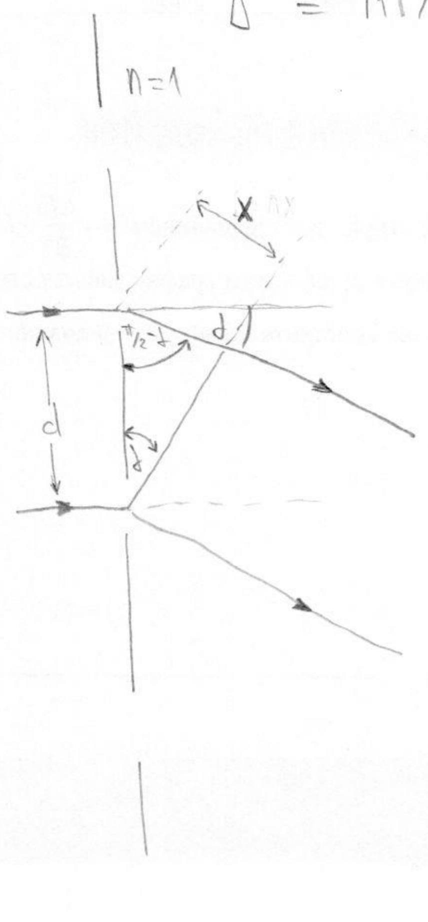
2.28 (Збирка Лукић) <u>Задатак</u>

Светлост таласне дужине $\lambda = 600\ nm$ пада нормално на дифракциону решетку и на заклону удаљеном $0{,}2\ m$ од решетке даје интерференционе максимуме првог реда међусобно удаљене $3{,}5\ cm$. Колико зареза на ширини од $1\ cm$ садржи ова решетка?

Решење:

Услов за појаву максимума на заклону је да путна разлика Δ између два таласа који пролазе кроз два суседна зареза буде целобројни умножак таласних дужина.

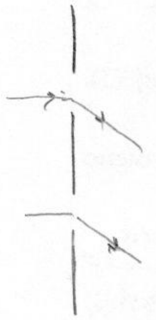
$$\Delta = m\lambda$$

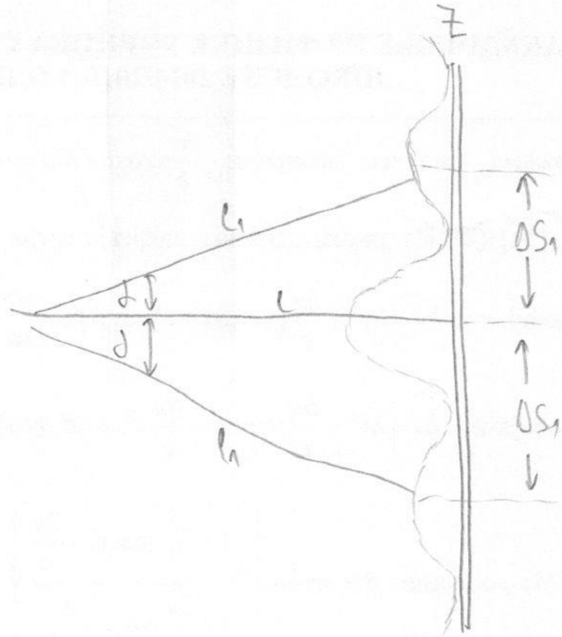


$$\Delta = nx$$

$$\sin\alpha = \frac{x}{d}$$

$$x = d\sin\alpha$$





$$\sin\alpha = \frac{\Delta S_1}{l_1} = \frac{\Delta S_1}{\sqrt{l^2+\Delta S_1^2}}$$

$$x = d\sin\alpha = \frac{d\,\Delta S_1}{\sqrt{l^2+\Delta S_1^2}}$$

$\Delta = n \cdot x$

$n = 1$

$\Delta = x$

$\Delta = m\lambda$

$$m\lambda = \frac{d\,\Delta S_1}{\sqrt{l^2+\Delta S_1^2}}$$

$$d = \frac{m\lambda\sqrt{l^2+\Delta S_1^2}}{\Delta S_1}$$

$$d = m\lambda\sqrt{\left(\frac{l}{\Delta S_1}\right)^2+1}$$

$$d = 1\cdot 600\cdot 10^{-9}\,m\sqrt{\left(\frac{0{,}12\,m}{0{,}0175\,m}\right)^2+1}$$

$$d = 6{,}883\cdot 10^{-6}\,m$$

$$d = 6{,}883\cdot 10^{-4}\,cm$$

$$N = \frac{1}{d} = 1453\ cm^{-1}$$

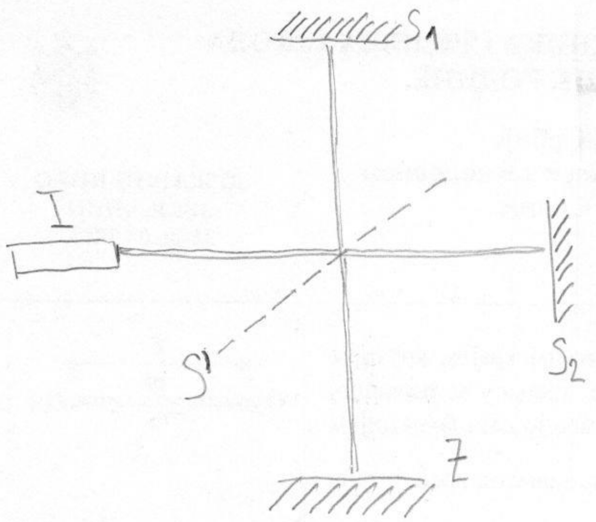
3.18. (Збирка задатака из физике) **Задатак**

На слици је приказан принцип рада Michelson-овог интерферометра. S' је полупропусно огледало постављено под углом од $45°$ на упадни сноп светлости из извора I (He-Ne ласер, $\lambda = 0{,}6328\ \mu m$). Слике извора I у огледалима служе као виртуелни извори светлости која стиже на заклон Z. Узмимо да су у почетку оптички путеви L снопа светлости од виртуелних извора $I'(S_1)$ и $I''(S_2)$ до средишта застора Z строго једнаки.

а) Наћи удаљеност d за коју треба померити једно од огледала S_1, односно S_2 да би се на удаљености r_k од центра застора појавио k-ти светли круг (максимум интерференције).

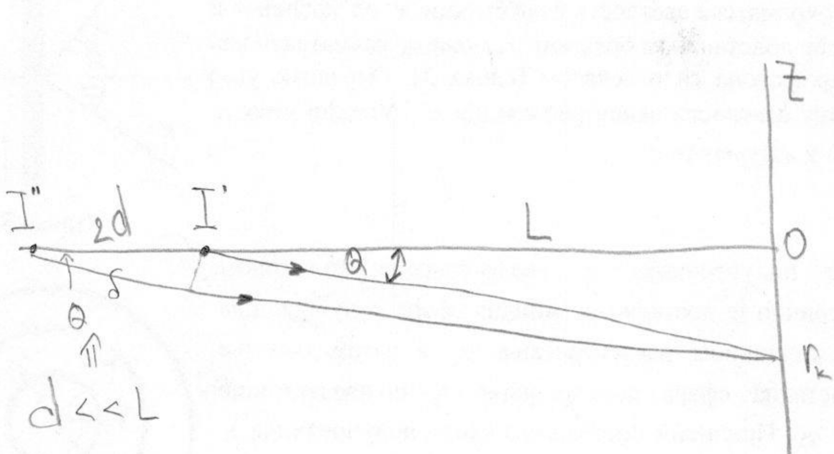
б) Да ли ће кругови вишег реда интерференције бити ближе или даље од центра застора?

в) Покажите да је за $r_k \ll L$ разлика квадрата радијуса суседних светлих прстенова (r_k, r_{k+1}) константна, тј. да зависи само од померања огледала и таласне дужине светлости.



Решење:

а) Положаје виртуелних извора I' и I'' према застору можемо приказати као на слици. Размак између I' и I'' је 2d јер померање огледала за d узрокује помак слике за 2d.



$$\theta \Uparrow$$
$$d << L$$

$$\delta = 2d\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{L}{\sqrt{L^2+r_k^2}}$$

$$\delta = k\lambda$$

$$d = k\frac{\lambda}{2}\frac{\sqrt{L^2+r_k^2}}{L}$$

$$d = \frac{k\lambda}{2\cos\theta}$$

б) $$d = k\frac{\lambda}{2}\frac{\sqrt{L^2+r_k^2}}{L}$$

$$\sqrt{L^2+r_k^2} = \frac{2Ld}{k\lambda}$$

$$L^2+r_k^2 = \frac{4L^2d^2}{k^2\lambda^2}$$

$$r_k^2 = -L^2 + \frac{4L^2d^2}{k^2\lambda^2}$$

$$r_k = \sqrt{-L^2 + \frac{4L^2d^2}{k^2\lambda^2}}$$

$$r_k = L\sqrt{-1+\left(\frac{2d}{k\lambda}\right)^2} \Rightarrow r_k = L\sqrt{\left(\frac{2d}{k\lambda}\right)^2-1}$$

$$k\uparrow \Rightarrow r_k\downarrow$$

в) $r_k << L \Rightarrow \theta$ је мали угао

$$f(x) \approx f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0)$$

$$\operatorname{tg}\theta \approx \theta$$

$$\operatorname{tg}\theta \approx \frac{r_k}{L}$$

$$\theta \approx \frac{r_k}{L}$$

$$\cos x \approx 1 + x\cdot 0 - \frac{x^2}{2}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{r_k^2}{2L^2}$$

$$2d\cos\theta = k\lambda$$

$$\rightarrow 2d\left(1-\frac{r_k^2}{2L^2}\right)=k\lambda$$

$$\rightarrow 2d\left(1-\frac{r_{k+1}^2}{2L^2}\right)=(k+1)\lambda$$

$$2d\left(1-\frac{r_k^2}{2L^2}\right)-2d\left(1-\frac{r_{k+1}^2}{2L^2}\right)=k\lambda-(k+1)\lambda$$

$$2d\left(\cancel{1}-\frac{r_k^2}{2L^2}-\cancel{1}+\frac{r_{k+1}^2}{2L^2}\right)=\cancel{k\lambda}-\cancel{k\lambda}-\lambda$$

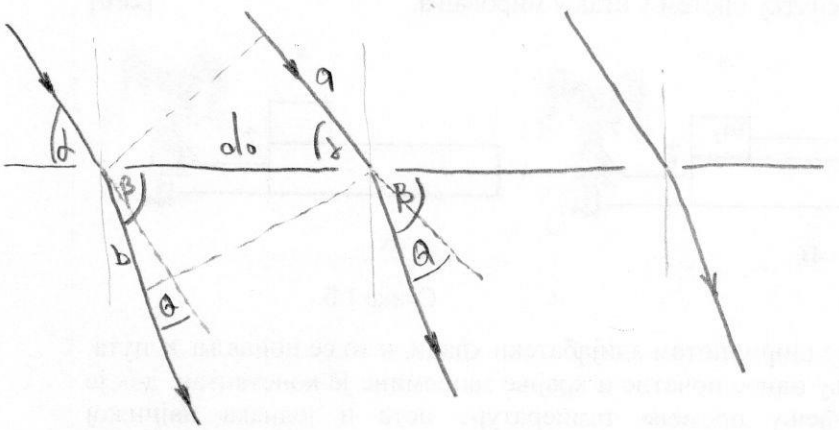
$$\frac{\cancel{2}d}{\cancel{2}L^2}\left(-r_k^2+r_{k+1}^2\right)=-\lambda$$

$$r_k^2-r_{k+1}^2=L^2\frac{\lambda}{d}$$

9. 12. (Видосав Марић ...) Задатак

Равански талас пада на дифракциону решетку са кораком d_0 под углом α. Показати да су резултати дифракције исти као када би талас падао нормално на решетку са кораком $d = d_0 \sin\alpha$.

$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L$



$\beta = \alpha + \theta$

$\Delta = n(a-b)$

$n = 1$

$\Delta = a - b$

$\Delta = d_0 \cos\alpha - d_0 \cos\beta$

$\Delta = n\lambda$

$d_0(\cos\alpha - \cos\beta) = n\lambda$

$\cos\alpha - \cos\beta = \cos\alpha - \cos(\alpha+\theta) =$

$= \cos\alpha - \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta$

За мале углове θ

$\cos\theta \approx 1$

$\cos\alpha - \cos\beta \approx \cos\alpha - \cos\alpha \cdot 1 + \sin\alpha\sin\theta$

$\cos\alpha - \cos\beta \approx \sin\alpha\sin\theta$

$\underline{d_0 \sin\alpha} \cdot \sin\theta = n\lambda$

$d \sin\theta = n\lambda$

Задатак

Две антене радиоодашиљача смештене су паралелно на удаљености $d = 100$ m. Оне раде у фази на заједничкој таласној дужини $\lambda = 200$ m. Интензитети емисија антена у хоризонталним смеровима су једнаки.

а) Наћи у којем је смеру у односу на симетралу између две антене укупно зрачење антена минимално а у којем максимално. Колики је у тим случајевима релативни интензитет емисије система?

б) Нацртајте у поларном координатном систему релативни интензитет емисије система зависно од смера емисије (у хоризонталној равни) за углове од 0 до 2π.

Решење:

За удаљену тачку у смеру θ зрачење из антена стиже са фазном разликом:

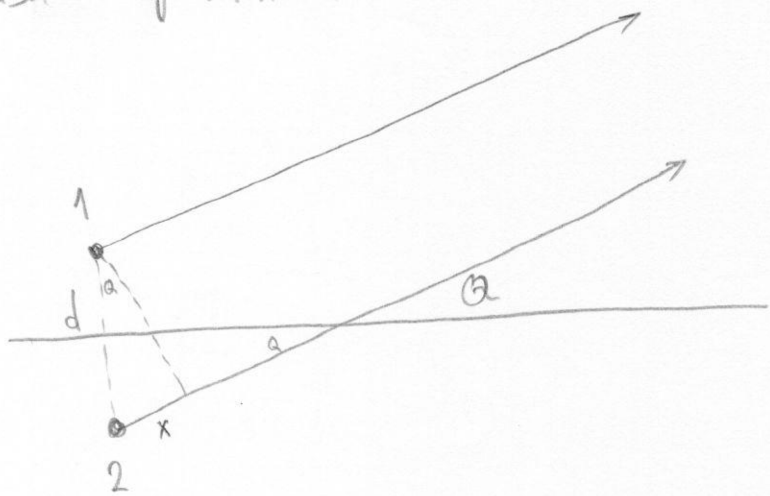
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

$d = 100\ \text{м}$

$\lambda = 200\ \text{м}$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{200\text{м}} 100\text{м} \sin\theta$$

$$\Delta\varphi = \pi \sin\theta$$



$L = n \cdot x$

$L = n \cdot d \sin\theta$

$n = 1$ (ваздух)

$L = d \sin\theta$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot L$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

$$\Delta\varphi \equiv \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

Укупан I_v у некој тачки је квадрат укупне амплитуде:

$$I_v = (\vec{A}_1 + \vec{A}_2)^2$$

$$I_v = (\vec{A}_1 + \vec{A}_2)(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)$$

$$I_v = A_1^2 + A_2^2 + 2\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2$$

$$I_v = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

Како је $A_1 = A_2 \equiv A$

$$I_v = 2A^2 + 2A^2\cos\Delta\varphi$$

$A^2 = I$ - интензитет емисије једне од антена

$$I_v = 2I(1 + \cos\Delta\varphi)$$

$$\Delta\varphi = \pi\sin\theta$$

$$I_v = 2I(1 + \cos(\pi\sin\theta))$$

- Услов за екстремум интензитета зрачења:

$$\frac{dI_v}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dI_v}{d\theta} = -2\pi I\sin(\pi\sin\theta)\cos\theta$$

$$\underbrace{\sin(\pi \cdot \sin \theta)}_{=0} \cdot \underbrace{\cos \theta}_{=0} = 0$$

$$\sin(\pi\sin\theta) = 0 \quad \vee \quad \cos\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\pi \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta = 0$$

$$\theta = 0$$

$\theta = 0 \wedge \theta = \frac{\pi}{2}$ - екстремне вредности

Шта је min, а шта max

$$\frac{d^2 I_v}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-2\pi I_v \sin(\pi\sin\theta)\cos\theta\right)$$

$$\frac{d^2 I_v}{d\theta^2} = -2\pi I_v\left(\cos(\pi\sin\theta)\cdot\pi\cdot\cos^2\theta - \sin(\pi\sin\theta)\sin\theta\right)$$

$$\theta = 0 \quad \frac{d^2 I_v}{d\theta^2} = -2\pi I_v\left(\pi - 0\right) = -2\pi^2 I_v < 0$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \max$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \frac{d^2 I_v}{d\theta^2} = -2\pi I_v\left(-\pi - 0\right) = 2\pi^2 I_v > 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} = \min$$

$\theta_{max} = 0$

$I_{u\,max} = 2I\left(1 + \cos\left(\pi \sin\theta_{max}\right)\right)$

$I_{u\,max} = 2I\left(1 + 1\right)$

$\frac{I_{u\,max}}{I} = 4$

$\theta_{min} = \frac{\pi}{2}$

$I_{u\,min} = 2I\left(1 + \cos\left(\pi \sin\theta_{min}\right)\right)$

$I_{u\,min} = 2I\left(1 - 1\right)$

$\frac{I_{u\,min}}{I} = 0$

б) За $\theta = 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°$ и $180°$ можемо одредити $\frac{I_u}{I}$. Може се показати: